

# Note del corso di Matematica Discreta

Michele Conforti, Yuri Faenza

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova

A.A. 2011/12



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	Definizioni preliminari . . . . .	9
1.2	Sottografi . . . . .	11
1.2.1	ContraZIONE, minori . . . . .	11
1.3	Cammini, cicli, tagli e connettività . . . . .	12
1.4	Alcune classi di grafi . . . . .	15
1.4.1	Isomorfismo tra grafi . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Arcoconnettività</b>	<b>23</b>
2.1	Definizioni . . . . .	23
2.2	Arcoconnettività e contraZIONE . . . . .	23
2.3	Il teorema di Menger . . . . .	25
2.4	L'algoritmo di Nagamochi ed Ibaraki . . . . .	27
2.5	Albero di Gomory-Hu . . . . .	30
2.5.1	Submodularità della funzione taglio . . . . .	30
2.5.2	Esistenza e computazione dell'albero di Gomory-Hu . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Grafi orientati</b>	<b>41</b>
3.1	Definizioni . . . . .	41
3.2	Teorema di Menger per grafi orientati . . . . .	43
3.3	Calcolo di massimo flusso e minimo taglio tra due vertici . . . . .	43
3.3.1	Rete e vettore di flusso . . . . .	43
3.3.2	Dualità debole tra flussi e tagli . . . . .	44
3.3.3	Cammini aumentanti . . . . .	45
3.3.4	Un algoritmo per trovare il flusso massimo . . . . .	47

<b>4</b>	<b>Separatori e connettività sui vertici</b>	<b>51</b>
4.1	Definizioni . . . . .	51
4.2	Terza formulazione del Teorema di Menger . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Albero ricoprente di peso minimo</b>	<b>57</b>
5.1	Definizioni, algoritmo di Kruskal . . . . .	57
5.2	Basi di matrici di incidenza in $\text{GF}_2$ . . . . .	58
5.3	Matroidi e algoritmo greedy . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Grafi <math>k</math>-connessi</b>	<b>65</b>
6.1	Definizioni e proprietà generali . . . . .	65
6.2	Grafi 2-connessi . . . . .	66
6.2.1	Applicazione della 2-connessione allo studio dei grafi fortemente connessi . . . . .	68
6.3	Ancora sui grafi $k$ -connessi . . . . .	69
6.4	Grafi 3-connessi . . . . .	72
6.5	Splitting-off e applicazioni . . . . .	74
6.5.1	Splitting-off . . . . .	74
6.5.2	Weak orientation theorem . . . . .	77
6.5.3	Aumento dell'arcoconnettività . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Matching</b>	<b>83</b>
7.1	Definizioni, condizioni di ottimalità di un matching . . . . .	83
7.1.1	Cammini aumentanti . . . . .	84
7.2	Grafi bipartiti . . . . .	86
7.2.1	Trasversali . . . . .	89
7.3	Grafi nonbipartiti . . . . .	90
7.4	Edge-coloring . . . . .	92
7.4.1	Definizioni, teorema di Vizing . . . . .	92
7.4.2	Grafi $k$ -regolari . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Planarità</b>	<b>99</b>
8.1	Definizioni e primi risultati . . . . .	99
8.1.1	Formula di Eulero . . . . .	101

<i>INDICE</i>	5
8.2 Teorema di Kuratowski . . . . .	102
<b>9 Colorazione dei vertici</b>	<b>107</b>
9.1 Teorema dei 4 colori e generalizzazioni . . . . .	107
9.1.1 Teorema di Tait . . . . .	109
9.2 Teorema di Brooks, Teorema dei 5–colori . . . . .	110
9.3 Congettura di Hadwinger e Teorema di Mader . . . . .	112
<b>10 Cicli hamiltoniani e tour euleriani</b>	<b>115</b>
10.1 Definizioni, condizioni necessarie per l’esistenza di un ciclo hamiltoniano	115
10.2 Condizioni sufficienti per l’esistenza di un ciclo hamiltoniano . . . . .	116
10.2.1 La chiusura di un grafo . . . . .	116
10.2.2 Altre condizioni sufficienti . . . . .	118
10.3 Cicli hamiltoniani in grafi planari . . . . .	119
10.4 Tour euleriani . . . . .	122



## Avvertenza

Queste note sono in versione preliminare e da considerarsi un supplemento ai libri di testo suggeriti, che non intendono dunque sostituire. Gli studenti sono quindi invitati ad utilizzare tali testi come riferimento delle nozioni spiegate in classe e qui riportate.

Libri di testo consigliati:

*J.A. Bondy, U.S.R. Murty*, Graph theory, Springer (Riservato in biblioteca).

*J.A. Bondy, U.S.R. Murty*, Graph theory with applications

(Scaricabile gratuitamente da <http://www.math.jussieu.fr/~jabondy/>).

*R. Diestel*, Graph Theory, Springer (Consultabile su <http://diestel-graph-theory.com/>).



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Definizioni preliminari

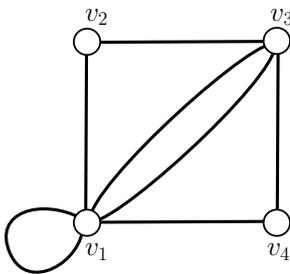
Un *grafo non orientato* (o più semplicemente un *grafo*)  $G(V(G), E(G))$  è una coppia ordinata  $(V(G), E(G))$ , dove  $V(G)$  è un insieme di *vertici* o *nodi*, ed  $E(G)$  è un multiinsieme di coppie non ordinate di vertici, detti *archi*. Per gli obiettivi di questo corso, assumeremo sempre che i grafi siano finiti, i.e. che  $V(G)$  ed  $E(G)$  abbiano cardinalità finita, e scriveremo  $n(G) = |V(G)|$  e  $m(G) = |E(G)|$ . Quando  $G$  sarà chiaro dal contesto, indicheremo l'insieme dei suoi vertici, archi e le loro cardinalità semplicemente come  $V, E, n, m$ . Dato un arco  $e = uv \in E$ , diciamo che  $u, v$  sono le *estremità* di  $e$ , e che  $e$  *incide* su  $u, v$ . Diciamo inoltre che due vertici  $u, v \in V$  sono *adiacenti* o *vicini* se sono estremità di un arco di  $G$ . L'insieme dei vertici adiacenti ad un vertice  $v$  si chiama *intorno* (*neighborhood*) di  $v$  e si denota con  $N(v)$ . Il *grado*  $d(v)$  di un vertice  $v \in V$  è il numero di volte in cui  $v$  appare come estremità di un arco. Il *grado massimo*  $d^{max}(G)$  ed il *grado minimo*  $d^{min}(G)$  sono rispettivamente il massimo ed il minimo grado di un vertice di  $G$ .

**Lemma 1.1.1.** *Per ogni grafo  $G(V, E)$  vale  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .*

*Dimostrazione.* Poiché ogni arco di  $G$  ha esattamente due estremità, dà un contributo di 2 a  $\sum_{v \in V} d(v)$ . □

**Lemma 1.1.2.** [Handshaking Lemma]

*In ogni grafo  $G(V, E)$  esiste un numero pari di vertici con grado dispari.*

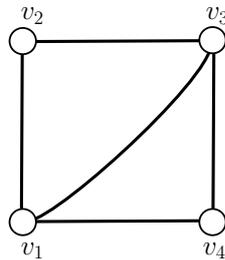


	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$v_1$	1	1	1	1	2	0	0
$v_2$	1	0	0	0	0	1	0
$v_3$	0	1	1	0	0	1	1
$v_4$	0	0	0	1	0	0	1

**Figura 1.1:** Il grafo  $G(V, E)$  con insieme di vertici  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e di archi  $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_1, v_1v_3, v_1v_3\}$  e la sua matrice di incidenza.

*Dimostrazione.* Dal Lemma 1.1.1, vale  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ . Il numero di archi in un grafo è quindi pari a  $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$ ; di conseguenza,  $\sum_{v \in V} d(v)$  è pari. Poiché il grado di un vertice è un intero, ne consegue che  $G$  contiene un numero pari di vertici con grado dispari.  $\square$

Un *cappio* (*loop*) è un arco le cui estremità coincidono. Archi con la stessa coppia di estremità sono *paralleli*. Si noti che la relazione di parallelismo definisce una relazione di equivalenza, le cui classi chiamiamo *classi parallele*. Un grafo è detto *semplice* se non ha cappi nè archi paralleli, altrimenti è detto *multigrafo*. Il grafo semplice  $G'$  ottenuto da un multigrafo  $G$  eliminando i cappi e lasciando un solo arco per ogni classe parallela è detto *scheletro* di  $G$ .

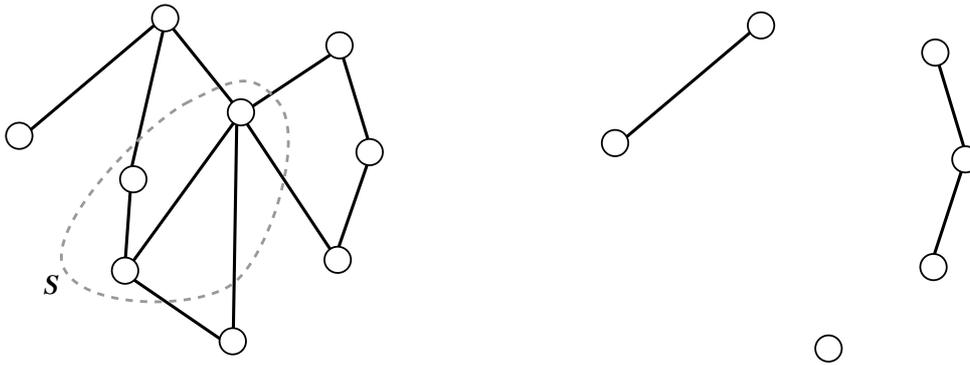


**Figura 1.2:** Lo scheletro del grafo della Figura 1.1.

La *matrice di incidenza*  $M(G)$  di un grafo  $G$  ha una riga per ogni vertice ed una colonna per ogni arco; il suo generico elemento  $va$  è pari a 0 se  $v$  non è un'estremità di  $a$ , ad 1 se  $v$  è esattamente una delle due estremità di  $a$ , a 2 se  $v$  coincide con entrambe le estremità di  $a$  (i.e.  $a$  è un cappio su  $v$ ). Si veda l'esempio di Figura 1.1. Si noti che il vettore somma delle colonne di  $M(G)$  è il vettore dei gradi di  $G$ .

## 1.2 Sottografi

Dato un grafo  $G(V, E)$  ed  $S \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$ , si indicano con  $\bar{S} = V \setminus S$  e  $\bar{E}' = E \setminus E'$ . Un *sottografo* di  $G$  è un grafo  $G'(V', E')$  con  $V' \subseteq V$  ed  $E' \subseteq E$ . (Si noti che  $E'$  non contiene nessun arco con una estremità in  $V \setminus V'$ .) Dato  $E' \subseteq E$ , si indica con  $G_{\setminus E'}$  il sottografo  $G(V, \bar{E}')$ . Si indica con  $G_{\setminus S}$  il sottografo  $G(\bar{S}, \bar{E}_S)$ , dove  $\bar{E}_S$  è l'insieme di archi in  $E$  con entrambe le estremità in  $\bar{S}$ . Il sottografo  $G(\bar{S}) = G_{\setminus S}$  in cui  $S$  viene rimosso si dice *indotto* da  $\bar{S}$ . Quando  $E' = \{e\}$  oppure  $S = \{s\}$ , scriveremo  $G_{\setminus e}$  oppure  $G_{\setminus s}$  invece di  $G_{\setminus \{e\}}$  (rispettivamente  $G_{\setminus \{s\}}$ ).



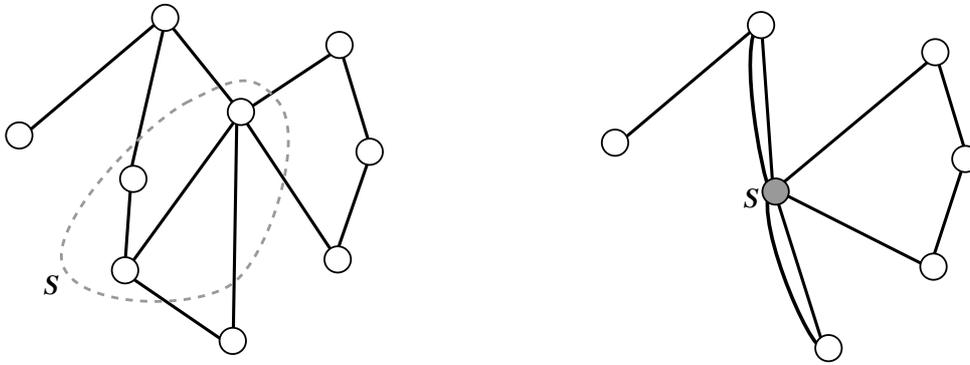
**Figura 1.3:** A sinistra: un grafo  $G(V, E)$  ed un insieme  $S \subseteq V$ . A destra: il suo sottografo indotto  $G_{\setminus S}$

### 1.2.1 Contrazione, minori

Dato un grafo  $G(V, E)$  ed un insieme  $\emptyset \neq S \subseteq V$ , definiamo il grafo  $G_{/S}(V_{/S}, E_{/S})$  con  $V_{/S} = (V \setminus S) \cup \{S\}$  dove  $S$  è un nuovo vertice, ed  $E_{/S} = E(\bar{S}) \cup \bar{E}$ , dove  $E(\bar{S})$  è l'insieme degli archi di  $E$  con entrambe le estremità in  $\bar{S}$ , mentre  $\bar{E}$  contiene un arco  $uS$  per ogni arco  $uv$  di  $E$  con  $u \in V \setminus S$  ed  $v \in S$ . Gli archi con entrambe le estremità in  $S$  sono diventati cappi in  $G_{/S}$  e vengono usualmente rimossi.

Ci riferiremo al grafo  $G_{/S}$  come al grafo ottenuto da  $G$  *contraendo* l'insieme  $S$ . (È utile ricordare che “\” indica rimozione (delete) mentre “/” indica contrazione (contract)).

Dato un arco  $e = uv$ , si indica con  $G_{/e} = G_{/\{u,v\}}$  il grafo ottenuto da  $G$  contraendo l'arco  $e$ .



**Figura 1.4:** A sinistra: un grafo  $G(V, E)$  ed un insieme  $S \subseteq V$ . A destra: il grafo  $G/S$

Un grafo  $G'(V', E')$  é *minore* di  $G(V, E)$  se  $G'$  puó essere ottenuto da  $G$  con una sequenza di

- contrazione di archi e
- rimozione di archi e vertici isolati.

### 1.3 Cammini, cicli, tagli e connettività

Un *percorso* (*walk*) in un grafo  $G(V, E)$  é una sequenza  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ ,  $k \geq 1$  tale che:

- $v_1, \dots, v_k \in V$ ,  $e_1, \dots, e_{k-1} \in E$ ;
- per ogni  $i = 1, \dots, k - 1$ ,  $e_i$  ha come estremità  $v_i$  e  $v_{i+1}$ .

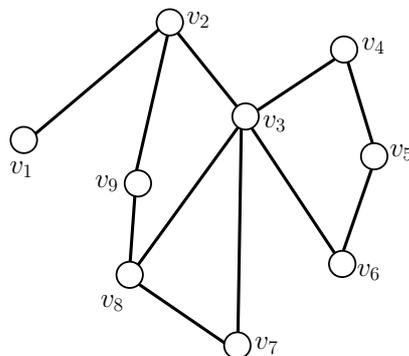
$v_1$  e  $v_k$  sono detti *estremità* del percorso, mentre i vertici  $v_i$ ,  $2 \leq i \leq k - 1$  sono detti *intermedi*. É considerato un percorso anche il caso degenere in cui  $k = 1$  (i.e. il percorso é dato da un singolo vertice). Un percorso é *chiuso* o *euleriano* se le sue estremità coincidono. La *lunghezza* di un percorso é il numero di archi nella sequenza.

Un percorso senza ripetizioni dei vertici (e quindi degli archi) é detto *cammino* (*path*). Un *ciclo* é un percorso chiuso le cui uniche ripetizioni di vertici sono le estremità, cioè  $v_1 = v_k$ . In un ciclo non ci sono quindi ripetizioni di archi. Si noti che un cappio con la sua estremità (i.e.  $u, uu, u$ ) e due archi paralleli con le loro estremità (i.e.

$u$ ,  $uv$ ,  $v$ ,  $uv$ ,  $u$ ) sono cicli di lunghezza 1 e 2. Dato un percorso (rispettivamente cammino)  $P_1 v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}e_{k-1}, v_k$ , un percorso (rispettivamente cammino)  $P_2$  è detto *sottopercorso* (rispettivamente *sottocammino*) di  $P_1$  se esistono  $1 \leq \ell \leq t \leq k$  tale che  $P_2$  è dato dalla sequenza  $v_\ell, e_\ell, v_{\ell+1}, e_{\ell+1}, \dots, v_{t-1}, e_{t-1}, v_t$ .

E' immediato osservare che se due vertici  $u, v$  di un grafo sono estremità di un percorso in  $G$ , allora esiste un cammino di  $G$  di cui  $u, v$  sono estremità, ottenuto dal percorso omettendo le sottosequenze fra vertici ripetuti.

Due vertici si dicono *connessi* se esiste un cammino che li unisce. Si noti che la relazione di connessione è riflessiva, simmetrica e transitiva, e definisce quindi una relazione di equivalenza, le cui classi sono dette *componenti connesse* del grafo. Una componente di un grafo che contiene un solo vertice è detta *atomica*. Una componente connessa è *pari* se contiene un numero pari di vertici, *dispari* altrimenti. Il numero di componenti connesse di un grafo  $G$  è indicato da  $\gamma(G)$ . Un grafo è *connesso* se  $\gamma(G) = 1$ , *disconnesso* altrimenti. In un grafo connesso  $G$ , un arco  $e$  è un *ponte* se  $G \setminus e$  è disconnesso.



**Figura 1.5:** Illustrazione delle definizioni della Sezione 1.3: il grafo in figura contiene il percorso  $v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_5, v_5, v_5v_6, v_6, v_6v_3, v_3, v_3v_4, v_4$ , il percorso euleriano  $v_8, v_8v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_8, v_8$ , il cammino  $v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_7, v_7$  ed il ciclo  $v_3, v_3v_7, v_7, v_7v_8, v_8, v_8v_3, v_3$ . Il taglio  $\delta(\{v_2, v_3, v_7, v_9\})$  contiene tutti e soli gli archi  $v_1v_2, v_3v_4, v_3v_6, v_3v_8, v_7v_8, v_8v_9$ .

Dato un insieme  $S \subseteq V$ , il *taglio* (*cut*)  $\delta(S)$  è l'insieme degli archi del grafo che hanno esattamente una estremità in  $S$ . Si noti che  $\delta(S) = \delta(\overline{S})$ . Si definisce con  $d(S) = |\delta(S)|$  il *grado* di  $S$ . Ci riferiamo ad  $S$  come alla *spiaggia* (*shore*) del taglio. Si noti che  $\delta(S) = \delta(V \setminus S)$ . Un taglio in cui  $S = \{v\}$  per qualche  $v \in V$  è detto *stella* di

$v$  ed  $\bar{v}$  è indicato con  $\delta(v)$  (invece di  $\delta(\{v\})$ ). Dati due vertici  $u, v \in V$ , un taglio  $\delta(S)$  separa  $u$  e  $v$  se  $S$  contiene esattamente uno dei vertici  $u, v$ .

**Lemma 1.3.1.** *Sia  $P = v_1, e_1, v_2, \dots, e_{k-1}, v_k$  un cammino su un grafo  $G(V, E)$ , dove  $u = v_1$  and  $v_k = v$ . Sia  $\delta(S)$  un taglio che separa  $u$  da  $v$ . Allora  $|P \cap \delta(S)| \geq 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $v_i$  il vertice di indice massimo in  $P \cap S$ . Poiché  $v_1 = u \in S$  e  $v_k = v \in \bar{S}$ ,  $i$  è ben definito e vale al più  $k - 1$ . Questo implica che  $v_{i+1} \in P \cap \bar{S}$ . Poiché  $e_i$  ha come estremi  $v_i$  e  $v_{i+1}$ , ne consegue che  $e_i \in \delta(S)$ .  $\square$

Utilizzando lo stesso argomento è semplice dimostrare che, sotto le ipotesi del lemma precedente,  $|P \cap \delta(S)|$  è dispari.

**Lemma 1.3.2.** *Un grafo  $G(V, E)$  è connesso se e solo se  $\delta(S) \neq \emptyset$  per ogni  $\emptyset \neq S \subset V$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G(V, E)$  connesso, e sia  $\delta(S)$  un suo taglio con  $\emptyset \neq S \subset V$ . Allora  $\delta(S)$  separa due vertici, diciamo  $u$  e  $v$ . Poiché  $G$  è connesso, esiste un cammino  $P$  tra  $u$  e  $v$ . Per il Lemma 1.3.1,  $|P \cap \delta(S)| \geq 1$ , quindi  $\delta(S) \neq \emptyset$ .

Sia ora  $G(V, E)$  un grafo con  $\delta(S) \neq \emptyset$  per ogni  $\emptyset \neq S \subset V$  e sia  $u \in V$ . Sia inoltre  $U$  la componente connessa di  $G$  cui  $u$  appartiene. Si noti che  $U \neq \emptyset$ . Sia per assurdo  $U \neq V$ . Poiché  $\delta(U) \neq \emptyset$ , esiste un arco  $wz \in \delta(U)$  con  $w \in U, z \notin U$ . Ma questo è una contraddizione con il fatto che  $U$  è una componente connessa, perché  $z$  è connesso a  $w$ ,  $w$  è connesso a tutti i vertici in  $U$ , e per la proprietà transitiva della connettività,  $z$  è connesso a tutti i vertici in  $U$ .  $\square$

La dimostrazione del prossimo lemma è simile a quella del lemma precedente.

**Lemma 1.3.3.** *Dato un grafo  $G(V, E)$ , vertici  $u, v$  appartengono alla stessa componente connessa di  $G$  se e solo se  $\delta(S) \neq \emptyset$  per ogni taglio  $\delta(S)$  che separa  $u$  e  $v$ .*

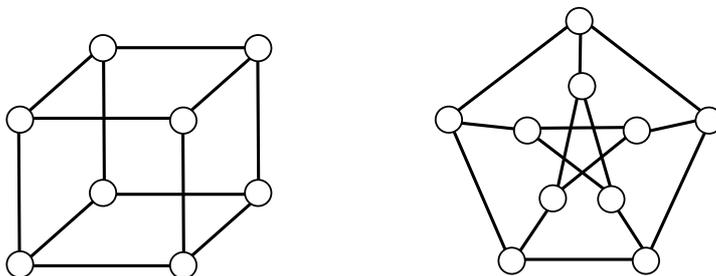
Dati due sottoinsiemi disgiunti  $X, Y \subseteq V$ , indichiamo con  $\delta(X, Y)$  il numero di archi con un'estremità in  $X$  e l'altra in  $Y$ . Poniamo inoltre  $d(X, Y) = |\delta(X, Y)|$ . Per  $X = \{x\}$ , scriviamo per semplicità  $\delta(x, Y)$  e  $d(x, Y)$ .

## 1.4 Alcune classi di grafi

Un grafo è *completo* (o è una *clique*) se è semplice, ed ogni sua coppia di vertici è adiacente. Si noti che per ogni numero naturale  $n$ , esiste uno ed un solo grafo completo con  $n$  vertici, che indicheremo con  $K_n$ .

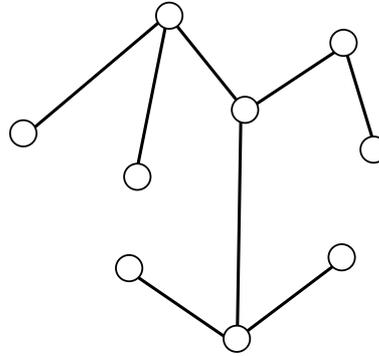
Un grafo  $G$  è *bipartito* se è possibile partizionare i suoi vertici in due insiemi  $U$ ,  $W$  tali che ogni arco di  $G$  abbia una estremità in  $U$  e l'altra in  $W$ . Quindi se  $G$  è bipartito,  $G$  non contiene cappi. Molto spesso, indicheremo tale grafo bipartito con  $G(U \cup W, E)$ . Per ogni coppia di interi  $n_1, n_2$ , indicheremo con  $K_{n_1, n_2}$  il grafo semplice bipartito  $G(U \cup W, E)$  con  $|U| = n_1$ ,  $|W| = n_2$  e tale che ogni vertice di  $u$  è adiacente a tutti i vertici di  $W$  (e di conseguenza, viceversa). Grafi del tipo  $K_{1, n}$ ,  $n \geq 3$  sono detti *stelle*.

Definiamo  $n$ -*ipercubo*  $Q_n$  il grafo semplice i cui vertici sono in corrispondenza biunivoca con un vettore binario ad  $n$  dimensioni, e due vertici sono adiacenti se e solo se i corrispondenti vettori differiscono in esattamente una componente. Si noti che  $Q_n$  ha  $2^n$  vertici. Inoltre ogni vertice di  $Q_n$  ha grado  $n$ , quindi dal Lemma 1.1.1 concludiamo che  $Q_n$  ha  $\frac{1}{2}(2^n \cdot n) = 2^{n-1} \cdot n$  archi. Un grafo è  $k$ -*regolare* se ogni vertice ha grado  $k$  (quindi,  $Q_n$  è  $n$ -regolare, mentre  $K_{n_1, n_1}$  è  $n_1$ -regolare). I grafi 3-regolari si dicono *cubici*. Un celebre esempio di grafo cubico è quello di *Petersen*, disegnato in Figura 1.6.



**Figura 1.6:** A sinistra: il 3-*ipercubo*. A destra: il grafo di Petersen.

Un grafo è *aciclico* se non contiene cicli. In particolare un grafo aciclico non ha archi paralleli (i.e. cicli di lunghezza 2) nè cappi (i.e. cicli di lunghezza 1), quindi è semplice. Un grafo aciclico è spesso chiamato *foresta*. Un grafo  $T(V, E)$  è detto *albero* (*tree*) se è *connesso* e *aciclico*. Gli alberi costituiscono una delle classi di grafi più



**Figura 1.7:** Un albero.

studiati. In questa sezione, vedremo solamente alcune proprietà di base. I vertici di grado 1 di un albero sono detti *foglie* (*leaves*). Gli altri sono detti *interni* o *intermedi*.

**Lemma 1.4.1.** *Ogni albero  $T$  con almeno due vertici ha almeno due foglie.*

*Dimostrazione.* Poiché  $T$  ha almeno due vertici ed è connesso, ha almeno un arco. Sia  $P$  un cammino massimale su  $T$ , i.e. un cammino che non è sottocammino di alcun altro cammino nel grafo: la sua lunghezza (si ricordi: numero di archi) è pari almeno ad 1. Siano  $u, v$  le estremità di  $P$ , e sia  $w$  un adiacente di  $u$ . Se  $w$  non appartenesse al cammino,  $P$  potrebbe essere esteso aggiungendo l'arco  $uw$  ed il vertice  $w$ , contraddicendone la massimalità. Quindi  $u$  è adiacente solo a vertici del cammino  $P$ . Per definizione, esiste  $w$  tale che  $uw \in P$ . Supponiamo esista un vertice  $w' \neq w$  del cammino adiacente ad  $u$ ; allora esisterebbero due cammini tra  $u$  e  $w'$  i cui vertici intermedi sono distinti (uno dato dall'arco  $uw'$ , l'altro dal sottocammino di  $P$  tra  $u$  e  $w'$ ). Questi due cammini formano un ciclo, contraddicendo l'ipotesi che  $T$  è un albero. Quindi  $u$  ha grado 1 e per simmetria anche  $v$ .  $\square$

**Lemma 1.4.2.** *In un albero  $m = n - 1$ .*

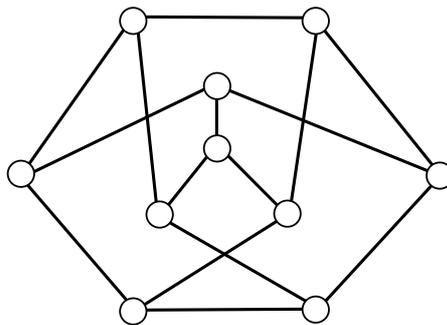
*Dimostrazione.* Dimostriamolo per induzione. E' banalmente vero per  $n = 1$ . Sia ora  $T$  un albero generico, e  $v$  una sua foglia, che esiste per il Lemma 1.4.1. Per induzione, l'albero  $T_{\setminus v}$  ha  $(n - 1) - 1 = n - 2$  archi. Ma  $T$  ha esattamente un arco in più di  $T_{\setminus v}$ , quindi  $T$  ha  $n - 1$  archi.  $\square$

**Lemma 1.4.3.** *Una foresta  $G(V, E)$  ha  $\gamma(G) = n - m$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $G$  è una foresta,  $n - m \geq 1$ . Mostriamo lo statement per induzione su  $n - m$ . Quando  $n - m = 1$  allora il grafo è un albero ed è quindi connesso, cioè  $\gamma(G) = 1$ . Sia ora lo statement vero per  $n - m = k - 1 \geq 1$ , mostriamolo per  $G$  con  $n(G) - m(G) = k$ . Siano  $C_1, \dots, C_t$  le componenti connesse di  $G$ . Per ogni  $i$ ,  $G^i = G[C_i]$  è un albero, quindi per induzione vale  $|C_i| - m_i = 1$ , dove  $m_i$  è il numero di archi di  $G$  tra due vertici di  $C_i$ . Poiché, per definizione di componente connessa,  $G$  non ha archi tra componenti connesse distinte, vale  $m(G) = \sum_{i=1}^t m_i = \sum_{i=1}^t |C_i| - t = n(G) - t$ . Poiché  $t$  è il numero di componenti connesse di  $G$ , ne segue la tesi.  $\square$

### 1.4.1 Isomorfismo tra grafi

Il disegno di un grafo é importante, può evidenziare alcune sue proprietà. Tuttavia un grafo può essere disegnato in maniere assai diverse. Diremo che grafi semplici  $G_1(V_1, E_1)$ ,  $G_2(V_2, E_2)$  sono *isomorfi* se possono essere disegnati allo stesso modo. Questo avviene se esiste una biiezione  $\pi$  fra  $V_1$  e  $V_2$  che preserva l'adiacenza. (Cioé  $u, v \in V_1$  sono adiacenti in  $G_1$  se e solo se  $\pi(u), \pi(v) \in V_2$  sono adiacenti in  $G_2$ ).



**Figura 1.8:** Un grafo isomorfo al grafo di Petersen.

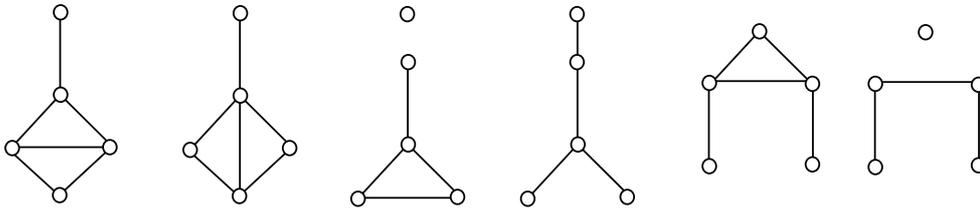
## Esercizi

**Esercizio 1.1** La teoria dei grafi é ricca di congetture facili da enunciare ma resistenti a molti tentativi di dimostrazione o confutazione. Eccone una (Reconstruction Conjecture, P. J. Kelly, S. M. Ulam, 1942):

Ogni grafo semplice con  $n(G) \geq 3$  é univocamente determinato dalla sua lista degli  $n(G)$  sottografi indotti ottenuti rimuovendo un vertice.

Dimostrate che l'ipotesi  $n(G) \geq 3$  é necessaria.

Verificate poi la congettura sulla seguente lista di sottografi indotti: quale é l'unico grafo semplice che può essere ricostruito a partire da questi (cioé, quale é l'unico grafo con 6 nodi di cui tutti questi sono sottografi indotti) ?



**Esercizio 1.2** Dato un grafo  $G$ , dimostrate  $d^{\min}(G) \leq \frac{2m(G)}{n(G)} \leq d^{\max}(G)$ .

**Esercizio 1.3** Dato un grafo semplice  $G$ , dimostrate che i gradi dei nodi di  $G$  sono gli elementi sulla diagonale di  $M(G)M(G)^T$ .

**Esercizio 1.4** Dimostrate che ci sono 11 grafi semplici non isomorfi con 4 vertici.

Elencate tutti gli alberi nonisomorfi con 5 vertici.

**Esercizio 1.5** Costruite due grafi cubici semplici connessi  $G_1, G_2$  non isomorfi con  $n(G_1) = n(G_2)$ .

**Esercizio 1.6** Quali sono i grafi semplici 2-regolari connessi non isomorfi con  $n$  vertici ?

**Esercizio 1.7** Dato un grafo semplice  $G(V, E)$  il suo grafo *complementare*  $G^c(V, E^c)$  ha lo stesso insieme di vertici ed  $u, v$  sono adiacenti in  $G^c$  se e solo se  $u, v$  non sono adiacenti in  $G$ .

Un grafo semplice  $G$  é *autocomplementare* se  $G$  e  $G^c$  sono isomorfi.

Dimostrate che un cammino di lunghezza 3 ed un ciclo di lunghezza 5 sono autocomplementari.

Dimostrate che se  $G$  é autocomplementare, allora  $n(G) \equiv 0, 1 \pmod{4}$ .

**Esercizio 1.8** Dimostrate che se  $G$  é semplice e  $m > \binom{n-1}{2}$ , allora  $G$  é connesso. Dimostrate che la disuguaglianza non può essere migliorata.

**Esercizio 1.9** Dimostrate che se  $G$  é semplice e  $d^{\min}(G) > \frac{1}{2}(n-2)$  allora  $G$  é connesso. Dimostrate che se  $n$  é pari, allora esiste un grafo semplice  $\frac{1}{2}(n-2)$ -regolare che non é connesso.

**Esercizio 1.10** Dimostrate che in un gruppo di  $n \geq 2$  amici ne esistono sempre 2 che hanno lo stesso numero di amici.

**Esercizio 1.11** Una sequenza  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  di interi positivi é una *sequenza grafica* se esiste un grafo semplice  $G = (V, E)$  con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $d(v_i) = d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Quale di queste sequenze e' grafica?

7 6 5 4 3 2 1

6 6 5 4 3 2 1

3 3 2 1 1

3 3 2 2

5 4 3 1 1 1 1

4 2 1 1 1 1

Dimostrate che una sequenza  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  di interi positivi é una sequenza grafica, allora

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

(+) Dimostrate che una sequenza  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  di interi positivi é una sequenza grafica se e solo se  $\sum_{i=1}^n d_i$  é pari e la condizione dell' es. precedente é soddisfatta.

Date un algoritmo polinomiale che decida se una data sequenza sia grafica e in caso positivo, costruisca un grafo semplice corrispondente.

**Esercizio 1.12** Data la sequenza grafica di  $G(V, E)$ , descrivete la sequenza grafica di  $G^c$ .

Dimostrate che se  $G$  non é connesso, allora  $G^c$  é connesso. L'opposta implicazione é vera?

**Esercizio 1.13** Dimostrare che una sequenza  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  di interi positivi é una sequenza grafica di un albero  $T$  se e solo se

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

**Esercizio 1.14** Sia  $G$  un grafo semplice con  $d^{\min}(G) \geq k$ . Dimostrare che  $G$  contiene un ciclo di lunghezza  $\geq k + 1$ .

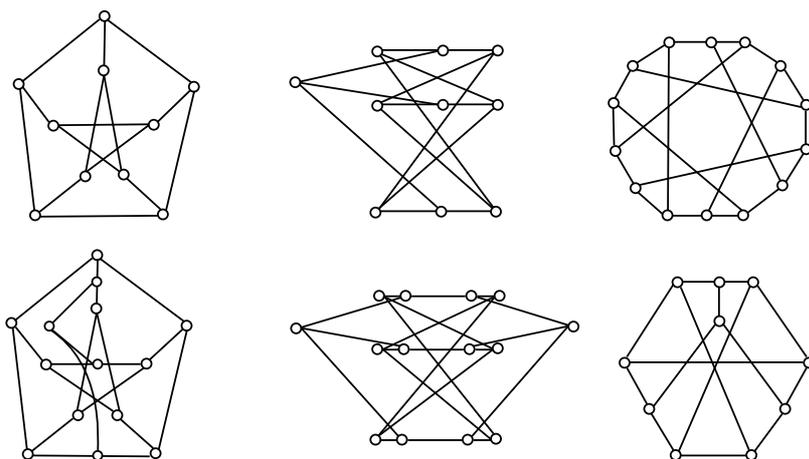
**Esercizio 1.15** Un grafo  $G(V, E)$  é  $k$ -partito se  $V$  può essere partizionato in  $k$  classi in modo che ogni arco abbia le estremitá in classi distinte. Sia  $G$  un grafo semplice  $k$ -partito e siano  $n_1, \dots, n_k$  le cardinalitá delle classi. Dimostrate che  $m(G) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i(n(G) - n_i)$ .

**Esercizio 1.16** Un grafo semplice  $k$ -partito é *completo* se ogni coppia di vertici di  $G$  in classi distinte é adiacente. Un grafo di Turán  $T_{k,n}$  é un grafo completo  $k$ -partito in cui la cardinalitá delle classi é la piú simile possibile. (cioé  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  oppure  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ ).

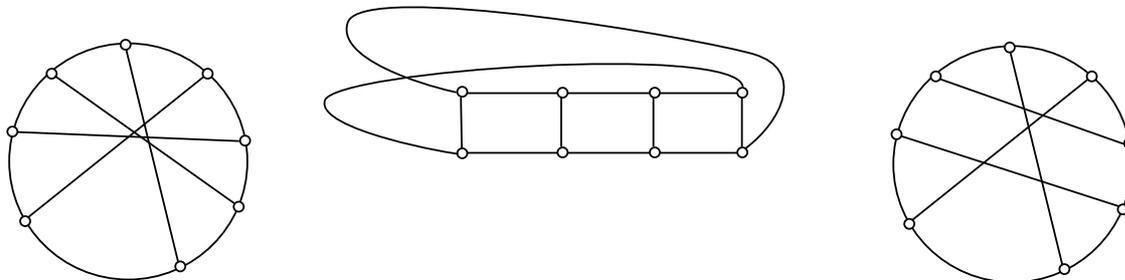
Dimostrate che, fissati  $n$  e  $k$ ,  $T_{k,n}$  é il grafo  $k$ -partito semplice con il massimo numero di archi.

Determinate  $m(T_{k,n})$ .

**Esercizio 1.17** Determinate quali tra i seguenti grafi sono isomorfi.



**Esercizio 1.18** Il grafo al centro é detto *Scala di Möbius* (*Möbius Ladder*) di ordine 8. Decidere se quale degli altri due gli é isomorfo.



**Esercizio 1.19** Per quali valori di  $n \in \mathbb{N}$  l' $n$ -ipercubo é bipartito ?

**Esercizio 1.20** Si dimostri che, se un grafo contiene esattamente due nodi di grado dispari, allora esiste un cammino tra questi due nodi.

**Esercizio 1.21** Sia  $G(V, E)$  un grafo connesso con almeno 3 vertici. Si dimostri che due cammini di lunghezza massima hanno in comune almeno un vertice. Si mostri con un controesempio che lo statement precedente non é vero se sostituiamo “arco” a “vertice”.

**Esercizio 1.22** Sia  $G(V, E)$  un grafo connesso con almeno 3 vertici. Si mostri che, se esistono due cammini di lunghezza massima che hanno in comune esattamente un vertice, allora esistono due cammini di lunghezza massima distinti tra loro (ma non necessariamente dai precedenti) con almeno un arco in comune.

**Esercizio 1.23** Un grafo *etichettato*  $(G, V), \phi$  é un grafo con associata una biezione  $\phi$  tra  $V$  e  $\{1, \dots, |V|\}$ . Per ogni nodo  $v \in V$ , il valore  $\phi(v)$  é detto *etichetta* del nodo  $v$ . Due grafi etichettati  $(G, \phi), (G', \phi')$  sono *diversi* se esiste  $i \in \{1, \dots, V\}$  tale che l'insieme di etichette dei nodi della lista di adiacenza di  $\phi^{-1}(i)$  é diversa dal medesimo insieme per  $(\phi')^{-1}(i)$ . Un celebre risultato, detto *Teorema di Cayley (Cayley's formula)*, mostra che gli alberi etichettati diversi con  $n$  nodi sono  $n^{n-2}$ . Ad esempio, si verifica facilmente che esistono tre alberi etichettati diversi aventi tre nodi.

- Si disegnino tutti i  $4^{4-2} = 16$  alberi etichettati diversi con 4 nodi.
- Quali sono i  $5^{5-2} = 125$  alberi etichettati diversi con 5 nodi?
- Si fissi ora  $n \geq 3$  e si trovi una formula chiusa per il numero di alberi etichettati diversi con  $n$  nodi aventi l'arco 12.



# Capitolo 2

## Arcoconnettività

### 2.1 Definizioni

Un grafo  $G$  è  $\ell$ -arcoconnesso ( $\ell$ -edge connected) se il grafo ottenuto da  $G$  rimuovendo al più  $\ell - 1$  archi è connesso. Ne consegue dal Lemma 1.3.2 che  $G$  è  $\ell$ -arcoconnesso se e solo se  $d(S) \geq \ell$  per ogni  $\emptyset \neq S \subset V$ .

L'arcoconnettività  $k^E(G)$  di  $G$  è il massimo valore di  $\ell$  per cui  $G$  è  $\ell$ -arcoconnesso. Un taglio  $\delta(S)$  è un *taglio minimo* di  $G$  se  $d(S) = \min_{\emptyset \neq U \subset V} d(U)$ . Ne consegue dal Lemma 1.3.2 che  $k^E(G)$  è la cardinalità di un taglio minimo in  $G$ . Quindi  $k^E(G) = 0$  se e solo se  $\gamma(G) \geq 2$ .

L'arcoconnettività  $k_{uv}^E(G)$  fra due vertici  $u, v$  in  $G$  è il minimo numero di archi da togliere a  $G$  affinché  $u$  e  $v$  siano in componenti connesse distinte. Un taglio  $\delta(S)$  che separa  $u$  da  $v$  è un *taglio minimo che separa  $u$  da  $v$* , se  $d(S) = \min_{|U \cap \{u,v\}|=1} d(U)$ . Dal Lemma 1.3.3, si ha che  $k_{uv}^E(G)$  è la cardinalità di un taglio minimo che separa  $u$  da  $v$ . Si noti infine che, se  $\delta(S)$  è un taglio minimo di  $G$ , allora  $\emptyset \neq S \subset V$ . Vale quindi  $k^E(G) = \min_{u,v \in V} k_{uv}^E(G)$ .

### 2.2 Arcoconnettività e contrazione

Dato  $S \subseteq V$ , dalla definizione di  $G/S$  è immediato definire una mappa tra gli archi  $G$  e quelli di  $G/S$  e di  $G/\bar{S}$ :

- l'arco  $uv \in E(G)$  con entrambe le estremità in  $\overline{S}$  corrisponde al medesimo arco di  $G/S$ .
- un arco  $uv \in E(G)$  con  $u \in S$  e  $v \in \overline{S}$  (cioè  $e \in \delta(S)$ ) corrisponde ad un arco  $u\overline{S}$  in  $G/\overline{S}$  e ad un arco  $Sv$  in  $G/S$ .

Di conseguenza, è immediato osservare che esiste una corrispondenza biunivoca fra:

- i tagli di  $G/S$  ed i tagli  $\delta(T)$  di  $G$  con  $T \cap S = \emptyset$  (o, equivalentemente,  $S \subseteq T$ );
- i tagli di  $G/\overline{S}$  ed i tagli  $\delta(T)$  di  $G$  con  $T \cap \overline{S} = \emptyset$  (o, equivalentemente  $\overline{S} \subseteq T$ ).

Si noti inoltre che ciascuna coppia di archi legati da tale relazione biunivoca ha lo stesso numero di archi. Deduciamo quindi quanto segue.

**Osservazione 2.2.1.** *Dati un grafo  $G(V, E)$  nodi  $s, t \in V(G)$  ed un taglio  $\delta(S)$  che separa  $s$  da  $t$ , si ha che*

$$k_{st}^E(G) \leq k_{St}^E(G/S) \text{ e } k_{st}^E(G) \leq k_{s\overline{S}}^E(G/\overline{S}). \quad (2.1)$$

Se  $\delta(S)$  è un taglio minimo che separa  $s$  da  $t$ , allora

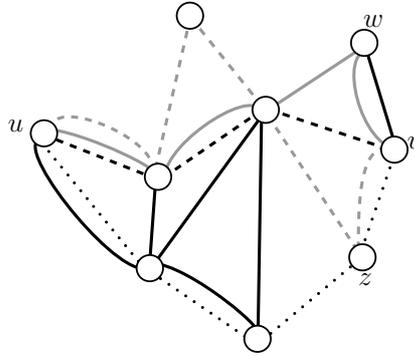
$$k_{st}^E(G) = k_{St}^E(G/S) \text{ e } k_{st}^E(G) = k_{s\overline{S}}^E(G/\overline{S}). \quad (2.2)$$

**Lemma 2.2.2.** *Dato un grafo  $G(V, E)$*

- ed un vertice  $u$ , vale  $k^E(G) = \min_{v \in V \setminus \{u\}} \{k_{uv}^E(G)\}$ ;
- e due vertici  $u, v$ , vale  $k^E(G) = \min\{k^E(G/\{u, v\}), k_{uv}^E(G)\}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\delta(S)$  un taglio minimo di  $G$ . Poiché  $\delta(S) = \delta(\overline{S})$ , possiamo assumere senza perdita di generalità  $u \in S$ . Per definizione,  $\overline{S}$  contiene un qualche nodo  $v$ . Questo dimostra la prima affermazione.

Sia ancora  $\delta(S)$  un taglio minimo. Se  $\delta(S)$  separa  $u$  e  $v$ , allora la sua cardinalità è  $k_{uv}^E(G)$ . Si ricordi che i tagli di  $G/\{u, v\}$  sono i tagli di  $G$  che non separano  $u$  e  $v$ . Quindi se  $\delta(S)$  non separa  $u$  e  $v$ , questi è un taglio minimo in  $G/\{u, v\}$  e la sua cardinalità è  $k^E(G/\{u, v\})$ . Questo dimostra la seconda affermazione.  $\square$



**Figura 2.1:** Illustrazione del teorema di Menger: il grafo in figura ha 4 cammini tra  $u$  e  $v$  disgiunti sugli archi (tratteggiati), ed ogni taglio minimo che separa tali nodi ha capacità 4. Un tale taglio è dato ad esempio da  $\delta(\{v, w, z\})$ .

## 2.3 Il teorema di Menger

Per una coppia di vertici  $s, t$  di un grafo  $G$ , introduciamo il parametro  $\lambda_{st}^E(G)$  che indica la cardinalità del più grande insieme di cammini di  $G$  che:

- hanno come estremità  $s$  e  $t$ ;
- sono disgiunti sugli archi.

Per entrambi i parametri  $\lambda$  e  $k$  ometteremo di indicare esplicitamente la dipendenza da  $G$  quando quest'ultimo sarà chiaro dal contesto.

**Teorema 2.3.1.** [Menger]

Dato un grafo  $G(V, E)$  ed una qualsiasi coppia  $s, t \in V$ , vale  $k_{st}^E = \lambda_{st}^E$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo anzitutto che  $k_{st}^E \geq \lambda_{st}^E$ . Si prenda una famiglia  $\mathcal{P}$  di cammini aventi come estremità  $s, t$  e disgiunti sugli archi, ed un qualsiasi taglio  $S$  che separa  $s$  da  $t$ . Poiché ogni arco del taglio può appartenere ad al più un cammino, ne segue che  $d(S) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}} d(S \cap P) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}} 1 = |\mathcal{P}|$ , dove la seconda disuguaglianza segue dal Lemma 1.3.1. Poiché queste relazioni valgono per qualsiasi famiglia  $\mathcal{P}$  e taglio  $\delta(S)$  che separa  $s$  da  $t$ , possiamo prendere quelli che realizzano rispettivamente  $\lambda_{st}^E$  e  $k_{st}^E$ , ottenendo  $k_{st}^E \geq \lambda_{st}^E$ .

Dimostriamo ora che  $k_{st}^E \leq \lambda_{st}^E$ . Supponiamo che  $k_{st}^E \leq \lambda_{st}^E$  non sia valida in generale, e sia  $G$  un suo minimo controesempio, i.e. un grafo per cui  $k_{st}^E > \lambda_{st}^E$  per qualche

coppia di vertici  $s, t$  e che, tra tutti i grafi con questa proprietà, sia uno che minimizza  $n(G) + m(G)$ . Dimosteremo che un tale grafo  $G$  non può esistere, pervenendo dunque a contraddizione.

**Claim 1:** Se  $\delta(S)$  è un taglio minimo di  $G$  che separa  $s$  da  $t$ , allora  $S$  è uno tra gli insiemi  $\{s\}$ ,  $\{t\}$  ed i loro complementi.

*Dimostrazione.* Sia  $\delta(S)$  un taglio minimo e sia  $S$  distinto da  $\{s\}$ ,  $\{t\}$  e dai loro complementi. Mostriamo che  $G$  non è un minimo controesempio, ottenendo una contraddizione. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che  $s \in S$ ,  $t \in \bar{S}$ . Si considerino i grafi  $G/S$  e  $G/\bar{S}$ . Poiché  $\delta(S)$  è un taglio minimo che separa  $s$  da  $t$ , dall'Osservazione 2.2.1, si ha che  $k_{st}^E(G) = k_{St}^E(G/S) = k_{s\bar{S}}^E(G/\bar{S})$ . Consideriamo ora il grafo  $G/S$ . Poiché  $n(G/S) + m(G/S) < n(G) + m(G)$  e  $G$  è un controesempio minimo al nostro teorema, vale  $k_{St}^E(G/S) = \lambda_{St}^E(G/S)$ . Inoltre, da quanto osservato  $\delta(\{S\})$  è il taglio minimo di  $G/S$  che separa  $S$  da  $t$ . Sia  $\mathcal{P}_S$  una famiglia di massima cardinalità di cammini da  $S$  a  $t$  su  $G/S$  disgiunta sugli archi. Per quanto detto,  $|\mathcal{P}_S| = \lambda_{St}^E(G/S) = k_{St}^E(G/S) = k_{st}^E(G)$ . Dal Lemma 1.3.1, sappiamo che ogni cammino di  $\mathcal{P}_S$  interseca  $\delta(\{S\})$  almeno una volta. Ma poiché  $k_{St}^E(G/S) = \lambda_{St}^E(G/S)$ , ogni cammino di  $\mathcal{P}_S$  intersecherà  $\delta(\{S\})$  esattamente una volta. Definendo simmetricamente  $\mathcal{P}_{\bar{S}}$  per il grafo  $G/\bar{S}$  e ripetendo lo stesso ragionamento, ogni cammino di  $\mathcal{P}_{\bar{S}}$  interseca  $\delta(\bar{S})$  esattamente una volta. Si noti inoltre che  $|\mathcal{P}_S| = |\mathcal{P}_{\bar{S}}|$ .

Mostriamo ora come costruire cammini da  $s$  a  $t$  in  $G$  disgiunti sugli archi partendo da cammini di  $\mathcal{P}_S$  e  $\mathcal{P}_{\bar{S}}$ . Si noti che gli unici archi di  $\mathcal{P}_S$  e di  $\mathcal{P}_{\bar{S}}$  che corrispondono a medesimi archi in  $G$  sono quelli di  $\delta(\{S\})$  e di  $\delta(\bar{S})$ . Questo definisce una corrispondenza biunivoca tra archi di  $\delta(\{S\})$  in  $G/S$  e di  $\delta(\bar{S})$  in  $G/\bar{S}$ . Si consideri ora un cammino  $P = S, e_1, \dots, e_{k-1}, t \in \mathcal{P}_S$ : per quanto detto, è possibile trovare esattamente un cammino  $P' = s, e'_1, \dots, e'_{k'-1}, \bar{S} \in \mathcal{P}_{\bar{S}}$  tale che  $e_1$  e  $e'_{k'-1}$  sono in corrispondenza biunivoca. Di conseguenza,  $s, e'_1, \dots, e'_{k'-2}, \bar{e}, e_2, \dots, e_{k-1}, t$  è un cammino da  $s$  a  $t$  in  $G$ , ove  $\bar{e}$  è l'arco di  $G$  che corrisponde ad  $e_1$  ed a  $e'_{k'-1}$ . Ripetendo questa operazione per ogni cammino di  $\mathcal{P}_S$ , otteniamo  $|\mathcal{P}_S|$  cammini disgiunti sugli archi da  $s$  a  $t$  in  $G$ . Poiché  $|\mathcal{P}_S| = |\mathcal{P}_T| = k_{st}^E(G)$ , esistono  $k_{st}^E(G)$  cammini da  $s$  a  $t$  in  $G$  disgiunti sugli archi, contraddicendo l'ipotesi che  $G$  sia un controesempio al teorema.  $\square$

**Claim 2:** Ogni arco di  $G$  appartiene ad un taglio minimo che separa  $s$  da  $t$ .

*Dimostrazione.* Se un arco  $e$  non appartenesse ad un taglio minimo di  $G$  che separa  $s$  da  $t$ ,  $G_{\setminus e}$  sarebbe un controesempio con  $n(G') + m(G') < n(G) + m(G)$ , contraddicendo la minimalità di  $G$ .  $\square$

Dal Claim 1 e 2 ricaviamo quindi che ogni arco di  $E$  ha almeno una estremità coincidente con  $s$  o con  $t$ . Senza perdita di generalità, supponiamo ora che  $\delta(s)$  sia il taglio minimo di  $G$  che separa  $s$  da  $t$ .

**Claim 3:** Per ogni vertice  $u$  di  $V$  distinto da  $s$  e  $t$  vale  $|\{e \in E : e = us\}| \leq |\{a \in E : a = ut\}|$ .

*Dimostrazione.* Si supponga  $|\{e \in E : e = us\}| > |\{e \in E : e = ut\}|$ . Poiché gli unici archi incidenti su  $u$  sono quelli aventi come altre estremità  $s$  o  $t$ , il taglio  $\delta(\{s, v\})$  sarebbe un taglio che separa  $s$  da  $t$  di cardinalità minore di  $\delta(s)$ , una contraddizione.  $\square$

Costruiamo una famiglia  $\mathcal{P}$  di cammini da  $s$  a  $t$  in  $G$  disgiunti sugli archi come segue: per ogni vertice  $v \neq s, t$ , per ogni arco  $e = vs \in E$ , formiamo il cammino  $(s, e, v, e', t)$ , dove  $e' = vt \in E$ . Il Claim 3 ci garantisce che è possibile trovare un arco  $e'$  non utilizzato in precedenza da alcun altro cammino. Infine creiamo un cammino  $(s, e, t)$  per ogni arco  $e = st \in E$ . È immediato osservare che  $|\mathcal{P}| = d(s) = k_{uv}^E(G)$ , contraddicendo il fatto che  $G$  sia un controesempio al teorema.  $\square$

## 2.4 L'algorithmo di Nagamochi ed Ibaraki

Illustriamo ora un metodo, dovuto a Nagamochi ed Ibaraki, che calcola  $k^E(G)$  trovando ripetutamente un coppia di vertici  $u, v$ , per cui è immediato calcolare  $k_{uv}^E(G)$ . Iniziamo con una semplice osservazione.

**Lemma 2.4.1.** Per ogni grafo  $G(V, E)$  e tre qualsiasi vertici distinti  $u, v, w \in V$ , vale  $k_{uw}^E \geq \min\{k_{uv}^E, k_{vw}^E\}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\delta(S)$  un taglio minimo che separa  $u$  da  $w$  con  $u \in S$ . Se  $v \in S$ ,  $\delta(S)$  è anche un taglio che separa anche  $v$  da  $w$ , quindi  $d(S) \geq k_{vw}^E$ . Altrimenti  $v \in \bar{S}$ , quindi  $\delta(S)$  è anche un taglio che separa anche  $u$  da  $v$  e di conseguenza  $d(S) \geq k_{uv}^E$ .  $\square$

Un *ordinamento* dei vertici di un grafo  $G(V, E)$  è una biiezione tra l'insieme  $V$  ed i numeri naturali  $1, \dots, n$ . Fissato un grafo  $G$  ed ordinamento  $\phi$ , indicheremo con  $v_i$  il vertice  $v \in V$  per cui vale  $\phi(v) = i$  e l'ordinamento con  $v_1, \dots, v_n$ . Un ordinamento di vertici di un grafo si dice *max back* se per ogni  $i = 2, \dots, n$ , il vertice  $v_i$  dell'ordinamento è un vertice  $v \in V \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  che massimizza  $|\{e = uv \in E : u \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}\}|$ , rompendo arbitrariamente le parità. Si noti che il nodo  $v_1$  può essere sempre scelto in modo arbitrario.

Non è in generale vero che, dati due vertici  $s, t$  di un grafo, il taglio minimo che li separa è  $\delta(s)$  o  $\delta(t)$ . E' vero invece che, in ogni grafo, esiste una coppia di vertici con questa proprietà; tale coppia ci è data da un ordinamento max back, come dimostrato dal seguente teorema.

**Teorema 2.4.2.** *Dato un grafo  $G(V, E)$  ed un ordinamento  $v_1, \dots, v_n$  max back dei vertici in  $G$ , vale  $k_{v_{n-1}v_n}^E = d(v_n)$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che il teorema sia falso e sia  $G$  un controesempio che minimizza  $n(G) + m(G)$ ; dimostreremo che un tale controesempio non può esistere, dimostrando quindi il teorema per contraddizione.

**Claim 1:**  $v_n, v_{n-1}$  non sono adiacenti.

*Dimostrazione.* Si supponga, per contraddizione, che esista  $e = v_n v_{n-1} \in E$ . Il grafo  $G' = G \setminus e$  non è un controesempio (altrimenti la minimalità di  $G$  sarebbe contraddetta). Inoltre, l'ordinamento dato è ancora max back per  $G'$ . Quindi  $\delta(v_n)$  è un taglio minimo che separa  $v_{n-1}$  da  $v_n$  in  $G'$ . Si noti che l'aggiunta di  $e$  agli archi di  $G'$  aumenta la capacità di *tutti* i tagli che separano  $v_{n-1}$  da  $v_n$  di esattamente uno. Perciò  $\delta(v_n)$  è un taglio minimo che separa  $v_n$  da  $v_{n-1}$  in  $G$ , contraddicendo l'ipotesi che  $G$  sia un controesempio.  $\square$

**Claim 2:**  $d(v_{n-1}) = k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo il grafo  $G' = G \setminus v_n$ . Si noti che l'ordinamento  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  è max back per  $G'$ . Per la minimalità di  $G$  il teorema è quindi valido per  $G'$ . Ne segue quindi (si è aggiunto un apice  $G'$  agli operatori  $\delta$  e  $d$  quando questi ultimi sono riferiti al grafo  $G'$ )

$$k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G') = |\delta^{G'}(v_{n-1})| = d^{G'}(v_{n-1}) = d(v_{n-1}), \quad (2.3)$$

dove l'ultima equazione segue dal fatto che non esistono archi in  $G$  tra  $v_{n-1}$  e  $v_n$  (Claim 1). Inoltre

$$d(v_{n-1}) \geq k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G) \geq k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G') \quad (2.4)$$

dove la prima disuguaglianza segue dal fatto che  $d(v_{n-1})$  è la cardinalità di uno *specifico* taglio di  $G$  che separa  $v_{n-1}$  da  $v_{n-2}$  (e quindi, in particolare, è maggiore della cardinalità del *minimo* taglio che separa  $v_{n-1}$  da  $v_{n-2}$  in  $G$ ), mentre la seconda dal fatto che per ogni  $S \subseteq V(G')$ ,  $d(S) \geq |\delta^{G'}(S)|$ . Dal raffronto di (2.3) ed (2.4) segue  $k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G) = d(v_{n-1})$ .  $\square$

Ragionando analogamente per  $G \setminus v_{n-1}$ , otteniamo quanto segue.

**Claim 3:**  $d(v_n) = k_{v_nv_{n-2}}^E(G)$ .

Dal Lemma 2.4.1 sappiamo che  $k_{v_nv_{n-1}}^E(G) \geq \min\{k_{v_nv_{n-2}}^E(G), k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G)\}$ . Dai Claim 2 e 3 si ha che  $d(v_n) = k_{v_nv_{n-2}}^E(G)$  e  $d(v_{n-1}) = k_{v_{n-1}v_{n-2}}^E(G)$ . Ne segue che

$$k_{v_nv_{n-1}}^E(G) \geq \min\{d(v_n), d(v_{n-1})\}. \quad (2.5)$$

Poiché l'ordinamento è max back,  $d(v_n) \leq d(v_{n-1})$ . Utilizzando (2.5), ne segue  $k_{v_nv_{n-1}}^E(G) \geq d(v_n)$ . Infine, osserviamo che  $d(v_n)$  è la cardinalità del taglio  $\delta(v_n)$  che separa  $v_n$  da  $v_{n-1}$  in  $G$ , quindi vale  $k_{v_nv_{n-1}}^E(G) \leq d(v_n)$  e di conseguenza  $k_{v_nv_{n-1}}^E(G) = d(v_n) = |\delta(v_n)|$ . Questo dimostra che il teorema è valido anche per  $G$ , ottenendo la contraddizione richiesta.  $\square$

Si noti che il teorema precedente implica che, in ogni grafo con almeno 3 vertici, esistono almeno *due* coppie di vertici  $u, v$  per cui  $k_{uv}^E = d(v)$ : la prima ci è data dai vertici  $(v_{n-1}, v_n)$  ottenuti applicando l'algoritmo max back a partire da un generico vertice  $v \in V$ , la seconda dai vertici  $(v'_{n-1}, v'_n)$  ottenuti applicando l'algoritmo max back a partire dal vertice  $v_n$ .

Dal Lemma 2.2.2 é immediato quindi concludere la correttezza del seguente algoritmo per il calcolo della cardinalità di un taglio minimo di un grafo.

ALGORITMO PER IL CALCOLO DEL TAGLIO MINIMO DI UN GRAFO

*Input:* Un grafo  $G = (V, E)$ . *Output:* Il valore  $k^E(G)$ .

1. **Inizializzazione:**  $G^n = G(V, E)$ .
2. **Ricorsione:** per  $i = n, n - 1, \dots, 2$ :
  - (a) Poni  $n_i = n(G^i)$ .
  - (b) Calcola un ordinamento max back  $v_1, \dots, v_{n_i}$  di  $G^i$ .
  - (c) Calcola  $k_{v_{n_i} v_{n_{i-1}}}^E(G^i) = d^{G^i}(v_{n_i})$ .
  - (d) Poni  $G^{i-1} = G^i / \{v_{n_i}, v_{n_{i-1}}\}$ .
3. **STOP;** Il valore cercato è  $k^E(G) = \min_{2 \leq i \leq n} \{k_{v_{n_i} v_{n_{i-1}}}^E(G^i)\}$ .

Si noti che, ricordando la sequenza delle contrazioni, è possibile ottenere, oltre al valore del taglio minimo, anche l'insieme  $S$  corrispondente.

## 2.5 Albero di Gomory-Hu

Dato un grafo  $G$ , quanti sono i valori distinti che può assumere, al variare di  $u, v$ , il valore  $k_{uv}^E$ ? Un immediato bound è dato dalle coppie di vertici del grafo, che sono in numero  $\binom{n}{2}$ . In realtà tali valori sono (asintoticamente) di meno. In questa sezione mostriamo un risultato allo stesso tempo strutturale ed algoritmico, che implica che il loro numero è al più  $n - 1$ .

### 2.5.1 Submodularità della funzione taglio

Dato un grafo  $G(V, E)$ , la sua *funzione taglio*  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}_+$  è data da  $f(S) = d(S)$ ,  $\forall S \subseteq V$ . È immediato verificare che la funzione taglio è *simmetrica* (i.e.  $f(S) = f(\bar{S})$ ), e vale 0 per l'insieme vuoto e per l'insieme universo  $V$ .

Dato un insieme finito  $V$ , una funzione  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , si dice *submodulare* se, per ogni  $X, Y \subseteq V$ , vale

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (2.6)$$

**Lemma 2.5.1.** *Dato un grafo  $G(V, E)$ , la sua funzione taglio è submodulare.*

*Dimostrazione.* Dati sottoinsiemi  $X, Y$  di  $V$ , dimostriamo

$$d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X \setminus Y; Y \setminus X) \quad (2.7)$$

Poiché  $2d(X \setminus Y; Y \setminus X) \geq 0$ , questo dimostra l'asserto.

Calcoleremo il contributo ad (2.7) di ogni arco di  $G$ . Sia  $e = uv$ ,  $u \in X$ ,  $v \in \overline{X}$ , quindi  $e \in \delta(X)$ . Distinguiamo i seguenti casi:

- $u \in X \setminus Y$ ,  $v \in \overline{X \cup Y}$ . L'arco  $e$  dá contributo unitario a  $d(X)$  e  $d(X \cup Y)$ .
- $u \in X \setminus Y$ ,  $v \in Y \setminus X$ . L'arco  $e$  dá contributo unitario a  $d(X)$ ,  $d(Y)$  e contribuisce 2 a  $d(X \setminus Y; Y \setminus X)$ .
- $u \in X \cap Y$ ,  $v \in \overline{X \cup Y}$ . L'arco  $e$  dá contributo unitario a  $d(X)$ ,  $d(Y)$ ,  $d(X \cap Y)$  e  $d(X \cup Y)$ .
- $u \in X \cap Y$ ,  $v \in Y \setminus X$ . L'arco  $e$  dá contributo unitario a  $d(X)$  e  $d(X \cap Y)$ .

Quindi il contributo di  $e$  ad entrambi i lati di (2.7) é lo stesso. Per simmetria, l'affermazione precedente vale anche nel caso  $e \in \delta(Y)$ . Osservando che, se  $e$  non appartiene né a  $\delta(X)$ , né a  $\delta(Y)$ , non dá alcun contributo a (2.7), ne segue la tesi.  $\square$

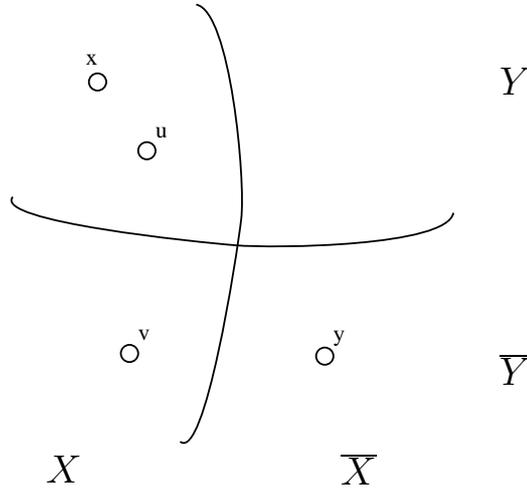
Dato un insieme  $V$ , due insiemi  $X, Y \subseteq V$  si dicono *crossing* se tutti gli insiemi  $X \setminus Y, Y \setminus X, X \cap Y, V \setminus (X \cup Y)$  sono non vuoti.  $X, Y \subseteq V$  sono *annidati* se è vera almeno una delle seguenti relazioni:  $X \subseteq Y$ ,  $Y \subseteq X$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ . La submodularità della funzione taglio permette di mostrare che, dati due tagli minimi crossing, é sempre possibile trovarne due annidati. Tale operazione é chiamata *uncrossing*.

**Lemma 2.5.2.** *Dato un grafo  $G(V, E)$  e tagli minimi  $\delta(X)$ ,  $\delta(Y)$  di  $G$ . Se  $X, Y$  sono crossing, allora anche  $\delta(X \cup Y)$ ,  $\delta(X \cap Y)$  sono tagli minimi di  $G$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $X, Y$  sono crossing, gli insiemi  $X \cup Y$ ,  $X \cap Y$ ,  $V \setminus (X \cup Y)$  sono non vuoti e quindi  $f(X \cup Y)$ ,  $f(X \cap Y)$  sono almeno pari al valore di un taglio minimo di  $G$ , i.e.

$$f(X \cup Y), f(X \cap Y) \geq f(X), f(Y). \quad (2.8)$$

Quindi  $f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ . Da quest'ultima relazione e dalla submodularità della funzione taglio, segue  $f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ . Quindi  $\delta(X \cup Y)$  e  $\delta(X \cap Y)$  sono tagli minimi di  $G$ .  $\square$



**Figura 2.2:** Illustrazione del Lemma 2.5.3.

Il prossimo lemma mostra che é possibile fare uncrossing anche quando i tagli sono minimi rispetto a due diverse coppie di nodi del grafo.

**Lemma 2.5.3.** *Dato un grafo  $G(V, E)$  sia  $\delta(X)$  un taglio minimo che separa  $x$  da  $y$ , con  $x \in X$ . Siano inoltre  $u, v \in X$ , e  $\delta(Y)$  un taglio minimo che separa  $u$  da  $v$  con  $y \notin Y$ . Allora  $\delta(X \cap Y)$  è un taglio minimo che separa  $u$  da  $v$  e  $\delta(X \cup Y)$  è un taglio minimo che separa  $x$  da  $y$ .*

*Dimostrazione.* Si noti che  $\delta(X \cup Y)$  separa  $x$  da  $y$ . Inoltre, assumendo senza perdita di generalità che  $u \in Y$ ,  $u \in X \setminus Y$  e quindi  $\delta(X \cap Y)$  separa  $u$  da  $v$ . Rimane da dimostrare che sono tagli minimi. Poiché  $\delta(X)$  è un minimo taglio che separa  $x$  ed  $y$ , La funzione taglio  $f(\cdot)$  di  $G$  soddisfa

$$f(X) \leq f(X \cup Y) \text{ e similmente } f(Y) \leq f(X \cap Y). \quad (2.9)$$

Quindi  $f(X) + f(Y) \leq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$ . Dalla submodularità della funzione taglio otteniamo  $f(X) + f(Y) = f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$ . Confrontando quest'ultima equazione con (2.9) otteniamo.  $f(X) = f(X \cup Y)$ ,  $f(Y) = f(X \cap Y)$ , da cui segue la tesi.  $\square$

Dal precedente lemma si deriva facilmente il seguente importante corollario che mostra che, sotto opportune ipotesi, l'operazione di contrazione preserva il taglio minimo che separa due nodi.

**Corollario 2.5.4.** *Siano  $G, x, y, u, v, X$  come nelle ipotesi del Lemma 2.5.3 e sia  $\delta(S)$  un taglio minimo che separa  $u$  da  $v$  in  $G/\overline{X}$ , con  $\overline{X} \notin S$ . Allora  $\delta(S)$  è anche un taglio minimo che separa  $u$  da  $v$  in  $G$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G' = G/\overline{X}$ . Si noti che, per ogni  $T \subseteq X$ , vale  $f^G(T) = f^{G'}(T)$ . Quindi, in particolare, si ha  $f^{G'}(S) = f^G(S)$ , e  $\delta(S)$  è, tra tutti i tagli  $\delta(T)$  di  $G$  con  $T \subseteq X$  che separano  $u$  da  $v$ , quello minimo. Il Lemma 2.5.3 garantisce l'esistenza di un taglio minimo  $\delta(T)$  che separa  $u$  da  $v$  tale che  $T \subseteq X$ . Concludiamo quindi che  $\delta(S)$  è un minimo taglio che separa  $u$  da  $v$  in  $G$ .  $\square$

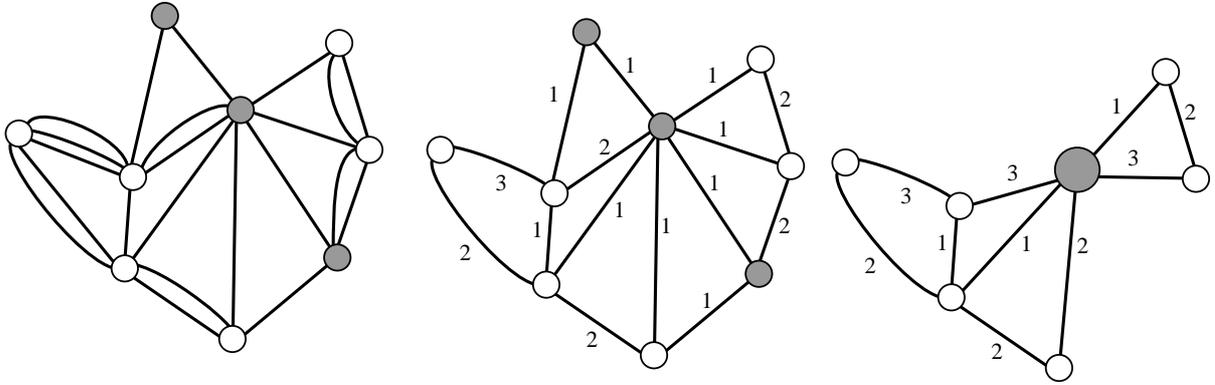
**Lemma 2.5.5.** *Dati un grafo  $G(V, E)$ , sia  $v_1, \dots, v_\ell$  una sequenza di vertici  $\ell \geq 3$ . Vale  $k_{v_1 v_\ell}^E \geq \min\{k_{v_1 v_2}^E, k_{v_2 v_3}^E, \dots, k_{v_{\ell-1} v_\ell}^E\}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\delta(S)$  un taglio minimo che separa  $v_1$  da  $v_\ell$ . Sia  $i$  il primo indice tale che  $v_i \in S, v_{i+1} \notin S$ . Si noti che  $i$  è ben definito e, in particolare,  $1 \leq i \leq \ell-1$ . Quindi il taglio  $\delta(S)$  separa  $v_i$  e  $v_{i+1}$ , e quindi vale  $k_{v_1 v_\ell}^E \geq k_{v_i v_{i+1}}^E \geq \min\{k_{v_1 v_2}^E, k_{v_2 v_3}^E, \dots, k_{v_{\ell-1} v_\ell}^E\}$ .  $\square$

Dato un grafo  $G(V, E)$ , quando necessario, assoceremo ad ogni suo arco  $e$  una capacità  $c_e$  intera nonnegativa. Indicheremo la capacità di un taglio  $\delta(S)$  con  $c(\delta(S)) = \sum_{e \in \delta(S)} c_e$ . Sia  $G'(V, E')$  il multigrafo ottenuto da  $G$  associando ad ogni arco  $e$  di  $G$ ,  $c_e$  archi paralleli. È immediato osservare che la capacità (pesata) di  $\delta(S)$  in  $G$ , cioè il valore  $c(\delta(S)) = \sum_{e \in \delta(S)} c_e$ , è esattamente  $d^{G'}(S)$ . Quindi i risultati ottenuti hanno una naturale estensione a grafi con capacità intere nonnegative. E' inoltre immediato estendere la definizione di contrazione di vertici al caso in cui agli archi di un grafo  $G(V, E)$  sia associata una capacità  $c_e$ : dato  $S \subseteq V$ , la contrazione di  $S$  restituisce il grafo  $G/S(V', E')$  con capacità  $c'_e$  pari a  $c_e$  se  $e \in E' \setminus \delta^{G/S}(S)$ , pari a  $\sum_{e \in E: e \in \delta^G(S) \cap \delta^G(t)} c_e$  se invece  $e = St$  per qualche  $t \in V' \setminus \{S\}$  (detto altrimenti, le operazioni di trasformare un multigrafo in un grafo con capacità e quella di contrarre un insieme di nodi del grafo commutano).

La seguente è una fondamentale proprietà dei tagli minimi sugli alberi con capacità.

**Lemma 2.5.6.** *Sia  $T(V, E)$  un albero con capacità  $c_e, e \in E$  intere nonnegative. Dati  $u, v \in V$ , ogni taglio minimo di  $T$  che separa  $u$  da  $v$  è del tipo  $\delta(S) = \{e^*\}$  ed ha capacità  $c_{e^*}$ , dove  $e^*$  è un arco di capacità minima sull'unico cammino tra  $u$  e  $v$  in  $T$ .*



**Figura 2.3:** A sinistra: un multigrafo, ed un sottinsieme  $S$  dei suoi vertici (in grigio). Al centro: lo stesso grafo con le capacità al posto degli archi paralleli. A destra: il grafo ottenuto da quello centrale contraendo i nodi in  $S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $e$  un arco del cammino  $P$  tra  $u$  e  $v$  in  $T$ . Si noti che la rimozione di  $e$  sconnette  $u$  da  $v$ , perché il cammino tra  $u$  e  $v$  in  $T$  è unico. Banalmente dunque,  $\{e\} = \delta(S)$ , dove  $S$  è la componente connessa di  $G \setminus e$  cui appartiene  $u$ . Quindi ogni arco  $e \in P$  è un taglio che separa  $u$  da  $v$  e di conseguenza  $k_{uv}^E \leq \min_{e \in P} c_e$ . Inoltre, ogni taglio  $\delta(S)$  che separa  $u$  da  $v$  dovrà contenere almeno un arco del cammino, altrimenti  $u$  e  $v$  sarebbero connessi nel grafo  $G \setminus \delta(S)$ . Quindi  $k_{uv}^E \geq \min_{e \in P} c_e$ , da cui  $k_{uv}^E = \min_{e \in P} c_e$ . Poiché ogni arco ha capacità strettamente positiva, ne segue che i tagli del tipo  $\{e^*\}$  con  $e^*$  arco di minima capacità nel cammino tra  $u$  e  $v$  in  $T$  sono gli unici tagli di minima capacità che separano  $u$  e  $v$ .  $\square$

Si noti che il Lemma 2.5.6 implica che, in un albero, il valore che assume un taglio minimo che separa due vertici  $u, v$  è pari a  $c_e$  per qualche arco  $e$  dell'albero. Poiché un albero ha  $n - 1$  archi (Lemma 1.4.2), i valori distinti che può assumere  $k_{uv}^E$  al variare di  $u, v$  sono  $n - 1$ , raggiungendo (per questa specifica classe di grafi) il bound menzionato all'inizio di questa sezione. Nel prossimo paragrafo vedremo come estendere questa proprietà a grafi qualsiasi.

## 2.5.2 Esistenza e computazione dell'albero di Gomory-Hu

Dato un grafo  $G(V, E)$  con capacità  $c \in \mathbb{Z}_+^{|E|}$  ed un albero  $T(V, E')$  con capacità  $w \in \mathbb{Z}_+^{|E'|}$ , diciamo che  $T, w$  è un *albero di Gomory-Hu per  $G$*  se per ogni coppia di vertici  $u, v \in V$  si ha che:

1.  $k_{uv}^E(G) = k_{uv}^E(T)$ ,
2. se  $\delta(S)$  è un taglio di capacità minima che separa  $u$  da  $v$  in  $T$ , allora  $\delta(S)$  è un taglio di capacità minima che separa  $u$  da  $v$  in  $G$ .

Si noti che non è richiesto che tutti i tagli (ed in particolare tutti i tagli minimi) di  $G$  siano rappresentati in  $T$ ; infatti, in generale non lo saranno. Inoltre  $E'$  non è, in generale, un sottoinsieme di  $E$ . Si noti che non è a priori chiaro se, dato un grafo, un albero di Gomory-Hu esista. Il seguente teorema risponde positivamente a questa domanda, e mostra anche come è possibile calcolarlo.

**Teorema 2.5.7.** *Ogni grafo  $G$  ammette un albero di Gomory-Hu, e questo può essere costruito risolvendo  $n - 1$  problemi di taglio minimo tra due nodi.*

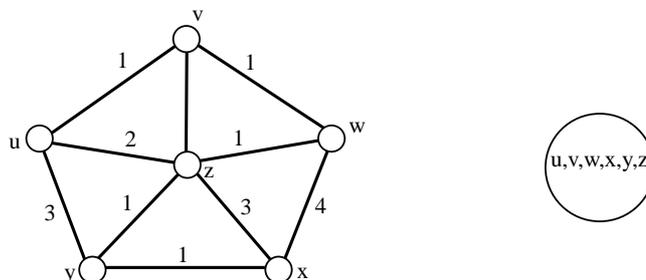
Non daremo una dimostrazione del Teorema 2.5.7. Forniamo invece un esempio di applicazione dell'algoritmo per il calcolo di tale albero per il grafo  $G(V, E)$  a sinistra nella Figura 2.4. L'algoritmo costruirà una successione di alberi  $T^1, \dots, T^n$ , in cui  $T^i$  ha esattamente  $i$  nodi, per  $i = 1, \dots, n$ . Per ciascuna  $i$ , ognuno dei nodi di  $T^i$  sarà associato ad uno o più nodi di  $V$ , in modo che tale associazione fornisca una partizione di  $V$ .

**ITERAZIONE 1:** Partiamo dunque con l'albero con un unico nodo  $t_1$ , associato ai nodi  $u, v, w, x, y, z$  di  $G$  (Figura 2.4). Scegliamo una coppia di nodi associata a  $t_1$ , ad esempio  $u, z$ , e calcoliamo in  $G$  un taglio minimo che li separa. Un tale taglio è dato, ad esempio, da  $\delta(\{u, y\})$ . Costruiamo dunque l'albero  $T^2$  "decontraendo" il nodo  $t_1$  in due nodi, rispettando la partizione data dal taglio: avremo dunque un nuovo nodo  $t_1$  a cui sono associati i nodi  $\{u, y\}$ , ed un nodo  $t_2$  a cui sono associati i nodi  $\{v, w, x, z\}$ , unendoli con un arco di costo  $c_{t_1 t_2} = c(\delta(\{u, y\}))$  (Figura 2.5).

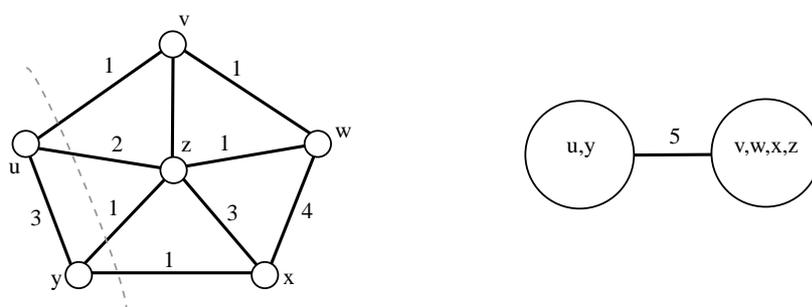
Si noti che vale la seguente proprietà (con  $i = 2$ ):

- (\*) Se  $t, t'$  sono due nodi adiacenti di  $T^i$ , allora esiste un nodo associato a  $t$  ed un nodo associato a  $t'$  separati in  $G$  da un taglio minimo di costo  $c_{tt'}$ , la cui spiaggia è una delle componenti connesse ottenute in  $T^i$  rimuovendo l'arco  $tt'$ .

**ITERAZIONE 2:** Scegliamo ora una coppia di nodi associati ad un nodo di  $T^2$ , diciamo  $z, w$  (associati a  $t_2$ ), e *contraiamo* in  $G$  i nodi  $u, y$  corrispondenti all'altro nodo

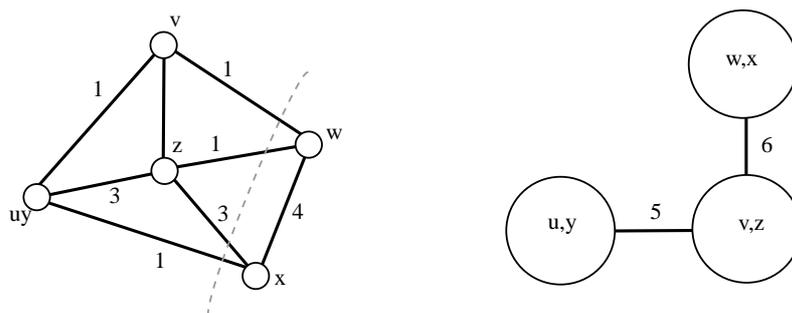


**Figura 2.4:** A sinistra: il grafo  $G$ . A destra: l'albero  $T^1$ .

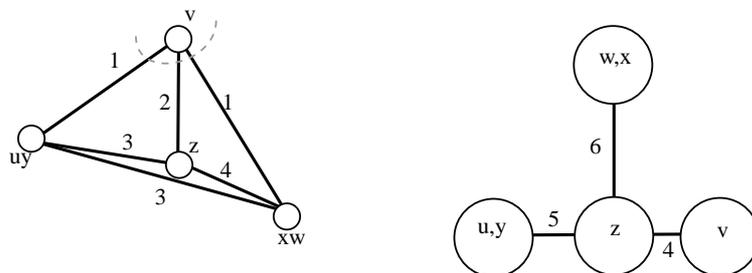


**Figura 2.5:** A sinistra: il grafo  $G$  ed un taglio minimo che separa  $u$  e  $z$ . A destra: l'albero  $T^2$ .

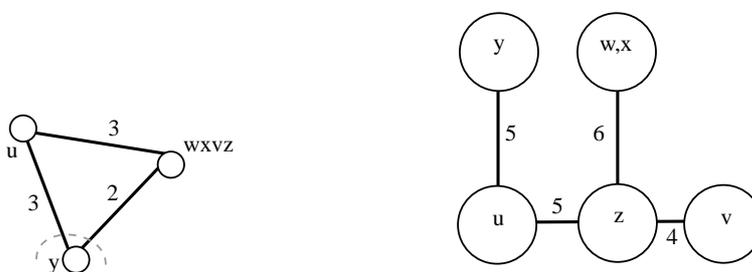
di  $T^2$ . Sia  $G^3$  il grafo così ottenuto: calcoliamo in  $G^3$  il minimo taglio che separa  $z$  da  $w$ : ad esempio,  $\delta(\{x, w\})$ . Si noti che il Lemma 2.5.3 ci garantisce che  $\delta(\{x, w\})$  è un taglio minimo che separa  $z$  da  $w$  in  $G$ . Costruiamo dunque l'albero  $T^3$  a partire dall'albero  $T^2$  e “scindendo” il nodo  $t_2$  in due nodi  $t_2$  e  $t_3$ , cui associamo rispettivamente i nodi  $vz$  e  $wx$ , uniti da un arco di costo pari a  $c(\delta_G(\{x, w\})) = 6$ . Poiché inoltre il nodo contratto  $uy$ , relativamente al taglio minimo che separa  $w$  da  $z$  in  $G^3$ , fa parte della stessa spiaggia di  $z$ , colleghiamo  $t_1$  ad  $t_2$  con l'arco di costo 5 (Figura 2.6). Per costruzione, la proprietà  $(*)$  è verificata per  $i = 3$ .



**Figura 2.6:** A sinistra: il grafo  $G^3$  ed un taglio minimo che separa  $w$  e  $z$ . A destra: l'albero  $T^3$ .



**Figura 2.7:** A sinistra: il grafo  $G^4$  ed un taglio minimo che separa  $v$  e  $z$ . A destra: l'albero  $T^4$ .

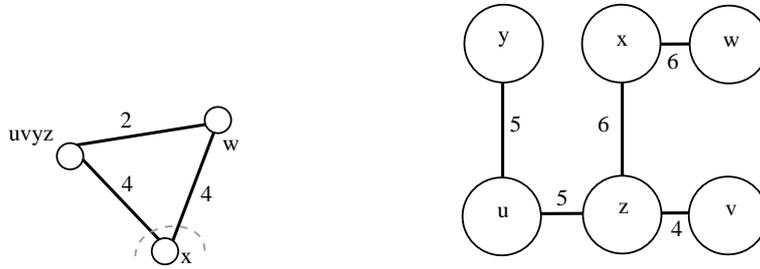


**Figura 2.8:** A sinistra: il grafo  $G^5$  ed un taglio minimo che separa  $u$  e  $y$ . A destra: l'albero  $T^5$ .

**ITERAZIONE 3:** Scegliamo la coppia di nodi  $v, z$ , e contriamo in  $G$  i nodi  $uy$  ed i nodi  $wx$ , ottenendo il grafo  $G^4$ . Un taglio minimo che separa  $v$  da  $z$  in  $G^4$  è  $\delta(v)$  con costo pari a 4. Costruiamo dunque  $T^4$  a partire da  $T^3$  e scindendo il nodo  $t_2$  in  $t_2$  e  $t_4$ , cui sono associati rispettivamente il nodo  $v$  ed il nodo  $z$ , uniti da un arco di costo 4. Poiché  $uy$  e  $wx$  appartengono alla stessa spiaggia di  $z$ , colleghiamo il nodo  $t_2$  ai nodi  $t_1$  e  $t_3$  (Figura 2.7). Di nuovo, il Lemma 2.5.3 ci garantisce che  $\delta(v)$  è un taglio di costo minimo in  $G$  che separa  $v$  e  $z$  e che vale  $(*)$  per  $i = 4$  (entrambe tali proprietà varranno anche per tutte le iterazioni successive, omettiamo di ripeterlo).

**ITERAZIONE 4:** Scegliamo la coppia di nodi  $u, y$ , e contriamo in  $G$  i nodi  $wxvz$ , ottenendo il grafo  $G^5$ . Un taglio minimo che separa  $u$  da  $y$  in  $G^5$  è  $\delta(y)$  con costo pari a 4. Costruiamo dunque  $T^5$  a partire da  $T^4$  come nelle iterazioni precedenti (Figura 2.8).

**ITERAZIONE 5:** Scegliamo l'ultima coppia di nodi rimasta, cioè  $w, x$ , e contriamo in  $G$  i nodi  $uvyz$ , ottenendo il grafo  $G^6$ . Un taglio minimo che separa  $w$  da  $x$  in  $G^6$  è  $\delta(w)$  con costo pari a 6. Costruiamo dunque  $T^6$  a partire da  $T^5$  come nelle iterazioni precedenti (Figura 2.9).



**Figura 2.9:** A sinistra: il grafo  $G^6$  ed un taglio minimo che separa  $w$  e  $x$ . A destra: l'albero  $T^6$ , che è un albero di Gomory-Hu per il grafo  $G$  in Figura 2.4.

L'algoritmo è terminato. Mostriamo ora che  $T^6$  è un albero di Gomory-Hu per  $G$ . Sia  $e = uv$  un arco di  $T$ : poiché vale (\*), un taglio minimo tra ogni coppia di nodi uniti in  $T$  da un arco  $e$  è dato dalla spiaggia corrispondente ad una delle componenti connesse di  $T$  ottenuta rimuovendo  $e$ , ed il suo costo è proprio il costo dell'arco  $e$  in  $T$ . Dal Lemma 2.5.6, concludiamo che le proprietà 1. e 2. dell'albero di Gomory-Hu valgono per ogni coppia di nodi uniti da un arco di  $T$ . Siano ora  $u, v$  una coppia di nodi non adiacenti in  $T$  e sia  $u = v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_k = v$  l'unico cammino tra  $u$  e  $v$  in  $T$ . Vale:

$$\begin{aligned} k_{uv}^E(G) &\geq \min\{k_{uv_2}^E(G), k_{v_2v_3}^E(G), \dots, k_{v_{k-1}v}^E(G)\} \\ &= \min\{k_{uv_2}^E(T), k_{v_2v_3}^E(T), \dots, k_{v_{k-1}v}^E(T)\} \\ &= k_{uv}^E(T), \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza segue dal Lemma 2.5.5, la prima uguaglianza dal fatto dimostrato sopra che  $k_{v',v''}^E(T) = k_{v',v''}^E(G)$  per ogni coppia di vertici  $v', v''$  adiacenti in  $T$ , e la seconda dal Lemma 2.5.6. Poiché ciascuno dei tagli che separano  $v_i v_{i+1}$  con  $i = 1, \dots, k-1$  è un taglio che separa  $u$  da  $v$ , la disuguaglianza vale all'uguaglianza e si ha dunque  $k_{uv}^E(G) = k_{uv}^E(T)$  (verificando il punto 1.), e quindi, definito  $S \subseteq V$  l'insieme tale che  $\delta(S)$  realizza il minimo, si ha che  $\delta(S)$  è un taglio minimo tra  $u$  e  $v$  in  $G$ , verificando dunque il punto 2.

Insieme alle considerazioni fatte all'inizio di questo paragrafo, il Teorema 2.5.7 implica che i valori distinti che può assumere  $k_{uv}^E$  al variare di  $u, v$  sono al più  $n-1$  e che anzi vale una proprietà più forte: per ogni grafo  $G$ , esiste un insieme  $\mathcal{S}$  di tagli di  $G$  tale che  $|\mathcal{S}| = n-1$  e, per ogni coppia di vertici  $u, v$  di  $G$ , esiste un taglio di  $\mathcal{S}$  la cui capacità è  $k_{uv}^E$ . Come annunciato dal teorema, per la costruzione dell'albero di Gomory-Hu è stato necessario risolvere  $n-1$  problemi di minimo taglio tra due vertici

(per inciso, su grafi di dimensione non maggiore a  $G$ ). Come mostreremo nella Sezione 3.3, ciascuno di questi problemi può essere risolto da un algoritmo con complessità polinomiale nella dimensione dell'istanza. Questo implica che l'albero di Gomory-Hu può essere costruito in tempo polinomiale.

## Esercizi

**Esercizio 2.1** Si utilizzi l'algoritmo di Nagamochi ed Ibaraki per dimostrare che, in ogni grafo con almeno 3 vertici, esistono almeno due coppie di nodi  $u, v$  tale che  $k_{uv}^E = d(v)$ .

**Esercizio 2.2** Si dimostri l'affermazione dell'esercizio precedente come conseguenza dell'esistenza dell'albero di Gomory-Hu.

**Esercizio 2.3** Un taglio  $\delta(S)$  si dice *dispari* se ha un numero dispari di archi. Dimostrare che un taglio è dispari se e solo se  $S$  contiene un numero dispari di vertici di grado dispari.

**Esercizio 2.4** Dimostrare che il minimo taglio dispari di un grafo è il minimo taglio dispari del suo albero di Gomory-Hu.

**Esercizio 2.5 (+)** Siano  $v_n, v_{n-1}$  gli ultimi due vertici di un ordinamento maxback di  $G$ . Dimostrate (senza utilizzare il teorema di Menger) che  $G$  contiene  $d(v_n)$  cammini tra  $v_n$  e  $v_{n-1}$  disgiunti sugli archi.



# Capitolo 3

## Grafi orientati

### 3.1 Definizioni

Un *grafo orientato* o *digrafo* (*digraph*)  $D$  è una coppia ordinata  $(V(D), A(D))$ , dove  $V(D)$  è un insieme di vertici ed  $A(D)$  è un multi-insieme di coppie *ordinate* di vertici. Ogni arco  $a = (u, v)$  di un grafo orientato ha una *coda* (*tail*) ed una *testa* (*head*) (si veda la Figura 3.1 per una rappresentazione di un grafo orientato). Diremo anche che  $a$  esce da  $u$  ed entra in  $v$ . Si noti che indichiamo un grafo non orientato con  $D$  (mentre uno non orientato con  $G$ ), e l'insieme dei suoi archi con  $A$  (mentre per un grafo non orientato lo indichiamo con  $E$ ). Molte definizioni e risultati introdotti per grafi non orientati possono essere adattati a grafi orientati.

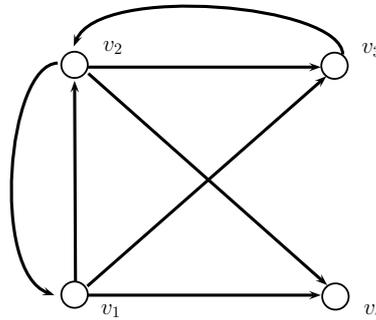
La *Matrice di incidenza* introdotta per grafi non orientati (cfr. Sezione 1.4) può essere definita in modo analogo per grafi orientati. Dato un grafo orientato  $D = (V, A)$ , la sua *matrice di incidenza (dei vertici verso gli archi)* ha una riga per ogni vertice ed una colonna per ogni arco; il suo elemento generico  $va$  è pari a 0 se  $v$  non è un'estremità di  $a$ , a  $-1$  se  $v$  è la coda di  $a$ , a  $+1$  se  $v$  è la testa di  $a$ .

Un *cammino (orientato)* da  $v_1$  a  $v_k$  su un digrafo  $D$  è una sequenza  $v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k$ , con  $k \geq 1$  tale che:

- $v_1, \dots, v_k$  sono vertici distinti di  $V$ ,  $a_1, \dots, a_{k-1} \in A$ ;
- per ogni  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $a_i$  ha come coda  $v_i$  e come testa  $v_{i+1}$ .

La *lunghezza* del cammino é il numero di archi nella sequenza. Ci riferiremo a  $v_1$  e  $v_k$  come le *estremità* del cammino. I vertici  $v_2, \dots, v_{k-1}$  sono detti *vertici interni* del cammino. Si noti però che l'esistenza di un cammino da  $s$  a  $t$  non implica l'esistenza di un cammino da  $t$  ad  $s$ , quindi in questo caso la proprietà di connessione non è simmetrica. L'esistenza di un cammino da  $s$  a  $t$  ed un cammino da  $t$  a  $z$  comporta l'esistenza di un cammino da  $s$  a  $z$ . Quindi la proprietà è transitiva.  $u$  e  $v$  si dicono *fortemente connessi* se  $u$  è connesso a  $v$  e  $v$  è connesso a  $u$ .  $D$  è *fortemente connesso* se ogni coppia di vertici  $u, v$  è fortemente connessa. Un *ciclo (orientato)* in  $D$  è una sequenza  $v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k = v_1$ , con  $k \geq 2$  tale che:

- $v_1, \dots, v_{k-1}$  sono vertici distinti di  $V$ ,  $a_1, \dots, a_{k-1} \in A$ ;
- per ogni  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $a_i$  ha come coda  $v_i$  e come testa  $v_{i+1}$ .



**Figura 3.1:** Un digrafo con archi  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_1, v_4)$ ,  $(v_2, v_1)$ ,  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_3, v_2)$ ,  $(v_3, v_4)$ .  $v_3, a_{32}, v_2, a_{21}, v_1, a_{14}, v_4$  è un cammino da  $v_3$  a  $v_4$  su tale grafo.

Dato un digrafo  $D(V, A)$ , ed un insieme  $S \subseteq V$ , indichiamo con  $\delta^+(S) = \{uv \in A, u \in S, v \in \overline{S}\}$  il *taglio uscente* da  $S$  (o piu' semplicemente *taglio* associato ad  $S$ ). Indichiamo con  $\delta^-(S) = \{uv \in A, v \in S, u \in \overline{S}\}$  il *taglio entrante* in  $S$ . Vale ovviamente  $\delta^+(S) = \delta^-(\overline{S})$ .  $d^+(S) = |\delta^+(S)|$  é il *grado uscente* da  $S$  mentre  $d^-(S) = |\delta^-(S)|$  é il *grado entrante* in  $S$ .

Un taglio  $\delta^+(S)$  *separa*  $s$  da  $t$  se  $s \in S$  e  $t \in \overline{S}$ . Omettiamo la dimostrazione del seguente lemma, molto simile al caso non orientato.

**Lemma 3.1.1.** *Sia  $P$  un cammino da  $s$  a  $t$  su un digrafo  $D(V, A)$ , e sia  $\delta^+(S)$  un taglio che separa  $s$  da  $t$ . Allora  $|P \cap \delta^+(S)| \geq 1$ .*

Si può in effetti dimostrare che vale  $|P \cap \delta^+(S)| \geq |P \cap \delta^-(S)| + 1$ .

Dato un digrafo  $D(V, A)$ , con *grafo non orientato associato a  $D$*  intendiamo il grafo  $G(V, E)$  con  $E = \{uv : (u, v) \in A\}$ . (Informalmente,  $G$  è il grafo non orientato ottenuto rimuovendo l'orientamento degli archi di  $D$ ). Una sequenza  $v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k$  è un *cammino non orientato* in  $D$  se la sequenza ottenuta sostituendo ad ogni arco  $a_i = (u, v)$  un arco non orientato  $uv$  è un cammino nel grafo non orientato associato a  $D$ .

## 3.2 Teorema di Menger per grafi orientati

Sia  $k_{st}^A(D)$  il minimo numero di archi che deve essere tolto dal digrafo  $D$  affinché non ci sia nessun cammino da  $s$  a  $t$ . Analogamente al caso non orientato si osserva che  $k_{st}^A(D)$  è pari alla cardinalità del minimo taglio che separa  $s$  da  $t$ . Sia  $\lambda_{st}^A(D)$  il massimo numero di cammini da  $s$  a  $t$  disgiunti sugli archi in  $D$ . Vale un'analogia versione del Teorema di Menger, di cui daremo una dimostrazione algoritmica, usando la teoria dei flussi.

**Teorema 3.2.1.** [Menger, grafi orientati]

*Per ogni digrafo  $D(V, A)$  ed ogni coppia di vertici  $s, t \in V$ , vale  $k_{st}^A(D) = \lambda_{st}^A(D)$ .*

Il Teorema di Menger per grafi *non* orientati può immediatamente essere ricavato dal Teorema 3.2.1 come segue: si crei, a partire da un grafo  $G(V, E)$ , un digrafo  $D(V, A)$ , con  $A = \cup_{uv \in E} \{(u, v), (v, u)\}$ .

Esiste quindi una relazione biunivoca fra i cammini di  $G$  ed i cammini orientati di  $D$ ; fra i tagli  $\delta(S)$  in  $G$  ed i tagli  $\delta^+(S)$  in  $D$ . Possiamo quindi applicare il Teorema 3.2.1 al grafo  $D$ , e dedurne il Teorema di Menger 2.3.1 per il grafo  $G$ .

## 3.3 Calcolo di massimo flusso e minimo taglio tra due vertici

### 3.3.1 Rete e vettore di flusso

Una *rete di flusso* è un grafo orientato  $D = (V, A)$  in cui ad ogni arco  $a \in A$  è associata una *capacità*  $c_a \in \mathbb{Z}_+$ . Fissata una coppia di vertici  $s, t$ , supponiamo che l'arco  $(t, s)$

abbia capacità infinita. Un *vettore di flusso* (da  $s$  a  $t$ ) è un vettore in  $\mathbb{Z}^{|A|}$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- Per ogni  $a \in A$ ,  $0 \leq f_a \leq c_a$ .
- [Equazioni di conservazione del flusso] Per ogni vertice  $v \in V$ , si ha che

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0. \quad (3.1)$$

La quantità  $\sum_{a \in \delta^-(v)} f_a$  è il *flusso entrante* in  $v$  mentre  $\sum_{a \in \delta^+(v)} f_a$  è il *flusso uscente* da  $v$ . Le equazioni di conservazione del flusso si scrivono in forma matriciale come  $Mf = 0$ , dove  $M$  è la matrice di incidenza del grafo orientato  $D$ .

Il problema di *massimo flusso da  $s$  a  $t$*  consiste nel trovare un vettore di flusso che massimizza la componente  $f_{(t,s)}$ , chiamata *valore del flusso*.

### 3.3.2 Dualità debole tra flussi e tagli

Mostriamo ora il legame tra il problema del massimo flusso e quello del minimo taglio. Si ricordi (cfr. la Sezione 2.5) che per  $S \subseteq V$  la *capacità* del taglio  $\delta(S)$  è data da  $c(\delta^+(S)) = \sum_{a \in \delta^+(S)} c_a$ . Si noti che, se  $c$  è il vettore formato da tutti 1, allora  $c(\delta^+(S)) = d^+(S)$ .

**Lemma 3.3.1.** *Sia  $f$  un vettore di flusso e  $\delta^+(S)$  un taglio che separa  $s$  da  $t$ . Vale*

$$f_{(t,s)} \leq c(\delta^+(S)). \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.* Sia  $S \subset V$  un taglio che separa  $s$  da  $t$ . Sommando l'uguaglianza (3.1) per ogni vertice di  $S$ , abbiamo

$$\sum_{u \in S} \left( \sum_{a \in \delta^-(u)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(u)} f_a \right) = 0. \quad (3.3)$$

Si verifica facilmente che, per ogni arco  $a$ , il coefficiente di  $f_a$  vale:

- +1 se  $a \in \delta^-(S)$ .
- -1 se  $a \in \delta^+(S)$ .
- 0 altrimenti.

### 3.3. CALCOLO DI MASSIMO FLUSSO E MINIMO TAGLIO TRA DUE VERTICI 45

Poiché  $(t, s) \in \delta^-(S)$ , l'equazione (3.3) può essere quindi riscritta come:

$$f_{(t,s)} = \sum_{a \in \delta^+(S)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(S) \setminus \{(t,s)\}} f_a. \quad (3.4)$$

Poiché  $0 \leq f_a$  per  $a \in \delta^-(S) \setminus \{(t,s)\}$  e  $f_a \leq c_a$  per  $a \in \delta^+(S)$ , otteniamo  $f_{(t,s)} \leq \sum_{a \in \delta^+(S)} c_a = c(\delta^+(S))$ .  $\square$

Data una rete e un flusso  $f$ , un arco  $a$  si dice *saturo* se  $f_a = c_a$ , e *scarico* se  $f_a = 0$ .

**Osservazione 3.3.2.** *Sia  $\delta^+(S)$  un taglio che separa  $s$  da  $t$ , ed  $f$  un vettore di flusso da  $s$  a  $t$ . Allora:*

- (a)  $f_{(t,s)} = c(\delta^+(S))$  se e solo se tutti gli archi in  $\delta^-(S)$  sono scarichi, e tutti gli archi in  $\delta^+(S)$  sono saturi.
- (b) se  $f_{(t,s)} = c(\delta^+(S))$ , allora  $f$  è un flusso massimo da  $s$  a  $t$  e  $\delta^+(S)$  è un taglio di capacità minima che separa  $s$  da  $t$ .

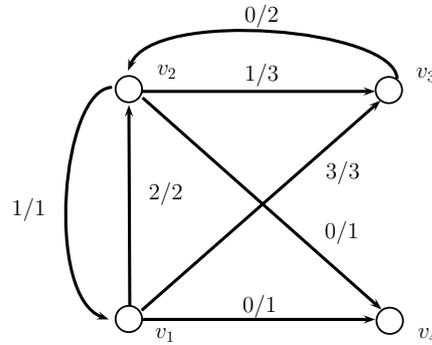
*Dimostrazione.* (a) Immediatamente dalla dimostrazione del Lemma 3.3.1.

(b) Il Lemma 3.3.1 implica che la capacità di un taglio che separa  $s$  da  $t$  è un upper bound al valore di un flusso da  $s$  a  $t$ , e viceversa il valore di un flusso da  $s$  a  $t$  è un lower bound alla capacità di ogni taglio che separa  $s$  da  $t$ . Se esiste quindi un flusso da  $s$  a  $t$  il cui valore è uguale alla capacità di un taglio che separa  $s$  da  $t$ , sono entrambi necessariamente ottimi.  $\square$

Nella prossima sezione mostreremo che l'uguaglianza  $f_{(t,s)} = c(\delta^+(S))$  è effettivamente raggiunta dal massimo flusso tra  $s$  e  $t$  e dal taglio di capacità minima. Su tale proprietà è basato l'algoritmo per calcolare un massimo flusso (e quindi un taglio di minima capacità): partendo da un vettore di flusso (e.g. il flusso identicamente pari a 0), lo aumentiamo iterativamente fino a quando (3.2) vale all'uguaglianza.

### 3.3.3 Cammini aumentanti

La *capacità residua* di un arco è  $c_a - f_a$ . Dato un cammino  $P = s = v_1, a_1, v_2, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k = t$  non orientato da  $s$  a  $t$ , sia  $F_P = \{a_i \in P : a_i = (v_i, v_{i+1})\}$  (informalmente, gli archi nel senso del cammino) e  $B_P$  i rimanenti archi di  $P$ .  $P$  è un *cammino aumentante* (rispetto ad un flusso  $f$ ) se nessuno arco di  $F_P$  è saturo, e nessuno arco di  $B_P$  è scarico. Questo



**Figura 3.2:** Il grafo di Figura 3.1, in cui ad ogni arco  $a$  è associata una coppia  $(f_a, c_a)$ .  $f_a$  è un vettore di flusso da  $v_1$  a  $v_3$  (abbiamo ommesso di disegnare l'arco fittizio  $(v_3, v_1)$  con flusso 4) e  $c$  un vettore di capacità.  $v_1, (v_2, v_1), v_2, (v_2, v_3), v_3$  è un cammino aumentante tra  $v_1$  e  $v_3$ .

è equivalente a richiedere che le capacità residue degli archi di  $F_P$  siano strettamente positive, e che i flussi sugli archi di  $B_P$  siano strettamente positivi.

**Lemma 3.3.3.** *Siano  $D = (V, A)$  una rete e  $f$  un flusso in  $D$ . Se esiste un cammino aumentante  $P$ , allora il flusso può essere aumentato di  $\epsilon = \min\{\min_{a \in F_P}\{c_a - f_a\}, \min_{a \in B_P}\{f_a\}\} > 0$ . Inoltre,  $\epsilon$  è un numero intero.*

*Dimostrazione.* Si osservi che  $\epsilon$  è intero, perché definito come minimo tra un insieme di interi (per ipotesi, abbiamo assunto che i vettori  $c$  ed  $f$  siano interi). Sia  $f'$  il vettore definito da  $f'_a = f_a + \epsilon$  se  $a \in F_P$ ,  $f'_a = f_a - \epsilon$  se  $a \in B_P$ ,  $f'_{(t,s)} = f_{(t,s)} + \epsilon$ , e  $f'_a = f_a$  altrimenti. E' quindi sufficiente dimostrare il seguente claim.

**Claim :**  $f'$  è un flusso.

*Dimostrazione.* Per definizione di  $\epsilon$ , abbiamo  $0 \leq f'_a \leq c_a$  per ogni  $a \in A$ . Inoltre, poiché  $f$  ed  $\epsilon$  sono interi,  $f'$  è intero. Ci rimane dunque da dimostrare che  $f'$  soddisfa le equazioni di conservazione del flusso. Sia  $v_i$  un vertice di  $P$ , e siano  $a_{i-1}, a_i$  gli archi di  $P$  incidenti su  $v$ . Se  $a_{i-1} \in F_P, a_i \in B_P$  allora il flusso entrante in  $v$  non varia (una sua componente aumenta di  $\epsilon$ , l'altra diminuisce di  $\epsilon$ ), così come il flusso uscente da  $v$  (nessuna componente è modificata). Una relazione simmetrica vale se invece  $a_i \in F_P, a_{i-1} \in B_P$ . Se invece  $a_{i-1}, a_i \in F_P$  (rispettivamente  $a_{i-1}, a_i \in B_P$ ), allora il flusso entrante e quello uscente da  $v$  aumentano di  $\epsilon$  (rispettivamente diminuiscono di  $\epsilon$ ).  $\square$

$\square$

### 3.3. CALCOLO DI MASSIMO FLUSSO E MINIMO TAGLIO TRA DUE VERTICI 47

#### ALGORITMO PER TROVARE UN CAMMINO AUMENTANTE

*Input:* Un flusso  $f$  da  $s$  a  $t$  nel grafo  $D = (V, A)$ . *Output:* Un cammino aumentante  $P$ , o un certificato dell'ottimalità di  $f$ .

1. **Inizializzazione:** poni  $L = \{s\}$ ,  $s$  non scandito.
2. **Ricorsione:** Fino a che  $L$  contiene un vertice  $u$  non scandito, [*Scandisci*  $u$ ]: poni  $L = L \cup \{v \in V : (u, v) \in A \text{ e non saturo}\} \cup \{v \in V : (v, u) \in A \text{ e non scarico}\}$ .
3. **STOP:** Tutti i vertici in  $L$  sono scanditi.
  - Se  $t \in L$ , allora  $D$  contiene un cammino aumentante per  $f$ ;
  - Altrimenti se  $t \notin L$ , sia  $S$  l'insieme dei vertici in  $L$ . Allora  $f_{ts} = c(\delta^+(S))$ .

**Lemma 3.3.4.** *L'algoritmo ALGORITMO PER TROVARE UN CAMMINO AUMENTANTE è corretto.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $t$  entri nella lista. Per ogni  $v \in L$ , sia  $p(v)$  il predecessore di  $v$ , cioè il vertice  $u$  durante la cui scansione  $v$  è stato inserito in  $L$ . Sia  $P = \{t = v_1, a_1 \dots, a_{k-1}, v_k = s\}$  il cammino non orientato costruito partendo da  $v = t$ , inserendo l'arco  $(p(v), v)$ , se  $(p(v), v) \in A$  ed è non saturo, altrimenti  $(v, p(v))$ , quindi ponendo  $v = p(v)$  ed iterando finchè  $v \neq s$ . Per costruzione, il cammino non orientato  $\{s = v_k, a_{k-1}, \dots, a_1, v_1 = t\}$  è ben definito ed aumentante per  $f$ .

Supponiamo ora che  $t$  non entri nella lista e sia  $S$  l'insieme dei vertici in  $L$ . Per costruzione,  $\delta^+(S)$  separa  $s$  da  $t$ , gli archi in  $\delta^+(S)$  sono saturi, mentre gli archi in  $\delta^-(S)$  sono scarichi. Per l'Osservazione 3.3.2, ne segue che  $f_{(t,s)} = c(\delta^+(S))$  e quindi  $f$  è un flusso massimo.  $\square$

### 3.3.4 Un algoritmo per trovare il flusso massimo

Dal Lemma 3.3.4 segue immediatamente la correttezza del seguente algoritmo.

#### ALGORITMO PER TROVARE UN FLUSSO MASSIMO ED UN TAGLIO DI CAPACITÀ MINIMA TRA DUE VERTICI

*Input:* Un grafo  $D = (V, A)$ , una coppia di vertici  $s, t \in V$ . *Output:* Un flusso massimo da  $s$  a  $t$  ed un taglio di capacità minima che separa  $s$  da  $t$ .

1. **Inizializzazione:** Poni  $f_a = 0$  per ogni  $a \in A$ .
2. **Ricorsione:**
  - Applica ALGORITMO PER TROVARE UN CAMMINO AUMENTANTE con input  $D, f$ .
  - Se l'algoritmo trova un cammino aumentante, aumenta  $f$  di  $\epsilon$  e ripeti step 2. Altrimenti, vai al passo 3
3. **STOP:** il flusso  $f$  trovato è quello massimo tra  $s$  e  $t$ , ed il taglio  $\delta^+(S)$  è un taglio di capacità minima che separa  $s$  da  $t$  ( $S$  è l'insieme dei vertici in  $L$ ).

Sottolineiamo di nuovo che per capacità unitarie, un taglio di minima capacità è anche un taglio di minima cardinalità. In questo caso, ogni flusso  $f$  determina  $f_{(t,s)}$  cammini orientati da  $s$  a  $t$  disgiunti sugli archi.

## Esercizi

**Esercizio 3.1** Dimostrare che un digrafo  $D = (V, A)$  senza cappi non contiene cicli orientati se e solo se i suoi nodi possono essere ordinati  $v_1, \dots, v_n$  in modo che  $i < j$  per ogni  $v_i v_j \in A$ .

**Esercizio 3.2** Dimostrare che gli archi di un digrafo  $D = (V, A)$  senza cappi possono essere partizionati in  $A_1$  e  $A_2$  in modo che entrambi  $D_1 = (V, A_1)$  e  $D_2 = (V, A_2)$  non contengano cicli orientati.

**Esercizio 3.3** Dimostrare che un grafo  $D(V, A)$  è fortemente connesso se e solo se, per ogni  $S \neq \emptyset, V$ , vale  $\delta^+(S) \neq \emptyset$ .

**Esercizio 3.4** Una *arborescenza radicata nel nodo  $s$*  è un digrafo in cui  $d^-(s) = 0$  e  $d^-(v) = 1$  per tutti gli altri nodi ed esiste un unico cammino orientato da  $s$  a tutti gli altri nodi. Dimostrare che un digrafo  $D = (V, A)$  contiene un'arborescenza radicata in  $s$  se e solo se se e solo se per ogni  $v \in V \setminus \{s\}$ , esiste un cammino orientato fra  $s$  e  $v$ .

### 3.3. CALCOLO DI MASSIMO FLUSSO E MINIMO TAGLIO TRA DUE VERTICI 49

Dato un digrafo  $D = (V, A)$  ed  $s, t \in V$ , un cammino orientato da  $s$  a  $t$  é *minimo* se contiene il minimo numero di archi. Tale lunghezza é la *distanza* da  $s$  a  $t$ . Considerate l'algoritmo seguente:

**Input**  $D = (V, A)$  tale che per ogni  $v \in V \setminus \{s\}$ , esiste un cammino orientato fra  $s$  e  $v$ .

**Output** Una partizione  $\{V_0, \dots, V_t\}$  di  $V$  con la proprietá che  $V_i$  contiene i nodi di  $D$  a distanza  $i$  da  $s$ .

*Inizializzazione* Poni  $V_0 = \{s\}$ ,  $i=0$ .

*Ricorsione* (Breadth-First Search) Fino a che  $V \setminus (V_0, \dots, V_i) \neq \emptyset$ , poni  $V_{i+1} = \{u : u \text{ é la testa di almeno un arco in } \delta^+(V_0 \cup \dots \cup V_i)\}$  ed  $i = i + 1$ .

**Esercizio 3.5** Dimostrare la correttezza dell'algoritmo proposto.

**Esercizio 3.6** Dimostrare che dato un digrafo  $D = (V, A)$  tale che per ogni  $v \in V \setminus \{s\}$ , esiste un cammino orientato fra  $s$  e  $v$ ,  $D$  contiene un'arborescenza  $T$  radicata in  $s$  in cui l'unico cammmino in  $T$  fra  $s$  e  $v$  é un cammino minimo fra  $s$  e  $v$  in  $D$ .

**Esercizio 3.7** Dato  $D = (V, A)$ , distanze  $d_a$ ,  $a \in A$ , la *lunghezza* di un cammino é la somma delle distanze dei suoi archi. Un cammino da  $s$  a  $t$  é *minimo* se la sua lunghezza é minima. Sia  $P$  un cammino minimo da  $s$  a  $t$  ed  $u, v$  due nodi incontrati in ques'ordine traversando  $P$  da  $s$  a  $t$ . Dimostrare che il sottocammino di  $P$  fra  $u$  e  $v$  é un cammino minimo fra  $u$  e  $v$ .

**Esercizio 3.8** Dato  $D = (V, A)$ , distanze  $d_a$ ,  $a \in A$ , una funzione  $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$  é un *potenziale* se vale  $\pi(v) - \pi(u) \leq d_{uv}$  per ogni arco  $uv \in A$ . Dimostrare che se  $d_a \geq 0$   $a \in A$ , allora esiste un potenziale.

**Esercizio 3.9** Dimostrare che se esiste un potenziale (cfr. Esercizio precedente), allora  $D$  non contiene un ciclo orientato di lunghezza negativa.



# Capitolo 4

## Separatori e connettività sui vertici

### 4.1 Definizioni

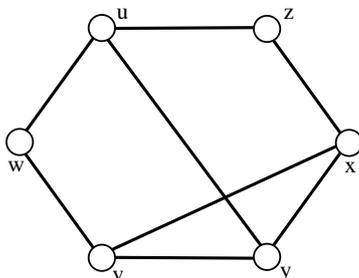
Dato un grafo  $G(V, E)$ , un sottoinsieme  $X \subseteq V$ ,  $1 \leq |X| \leq |V| - 2$  è un *separator* (*cutset*) se il sottografo indotto  $G \setminus X$  è disconnesso. Un separatore  $X$  è *minimale* se nessun sottoinsieme proprio di  $X$  è un separatore. Un vertice  $v \in V$  è uno *snodo* (*cutpoint*) se  $\{v\}$  è un separatore minimale.

Si noti che  $X$  è un separatore di  $G$  se e solo se  $X$  è un separatore dello scheletro di  $G$ .

**Lemma 4.1.1.** *Un grafo ha un separatore se e solo se il suo scheletro non è un grafo completo.*

*Dimostrazione.* Sia  $G(V, E)$  un grafo. Se lo scheletro di  $G$  non è completo, allora esistono due vertici  $u, v$  non adiacenti in  $G$ :  $V \setminus \{u, v\}$  è un separatore. Per dimostrare l'implicazione inversa è sufficiente osservare che un qualsiasi sottografo indotto di un grafo completo è un grafo completo esso stesso, ed è quindi connesso.  $\square$

Un grafo  $G(V, E)$  è  $\ell$ -connesso se  $n(G) \geq \ell + 1$  e  $G \setminus X$  è connesso per ogni  $X \subset V$ ,  $|X| \leq \ell - 1$ . La *connettività sui vertici*  $k(G)$  di  $G$  (o più semplicemente, *connettività*) è il più grande valore di  $\ell$  per cui  $G$  è  $\ell$ -connesso. Ne segue che se lo scheletro di  $G$  è  $K_n$ , la sua connettività è  $n - 1$ . Altrimenti  $G$  contiene almeno due vertici nonadiacenti e quindi  $k(G) \leq n - 2$  è la minima taglia di un separatore in  $G$ . Si noti dunque che per



**Figura 4.1:** Per il grafo  $G$  in figura si ha  $k(G) = 2$ :  $\{u, v\}$  è infatti un suo separatore. Inoltre, vale  $k_{ux}(G) = 3$ ; infatti, tre cammini internamente disgiunti tra  $u$  e  $x$  sono: quello attraverso  $z$ , quello attraverso  $y$ , e quello attraverso  $w$  e  $v$ .

un grafo  $G$  il cui scheletro non è completo, vale  $k(G) = \min\{|X| : X \text{ è un separatore in } G\}$ .

Dati due vertici  $u, v \in V$  non adiacenti, definiamo  $k_{uv}(G)$  come la minima cardinalità di un separatore la cui rimozione disconnette  $u$  da  $v$ .

## 4.2 Terza formulazione del Teorema di Menger

Uno dei problemi fondamentali in teoria dei grafi è quello di calcolare la cardinalità di un minimo separatore per un grafo. Mostriamo che, anche in questo caso, vale una relazione duale analoga a quella per la connettività sugli archi. Definiamo infatti  $k$  cammini da  $s$  a  $t$  *internamente disgiunti* se hanno vertici intermedi distinti. Sia  $\lambda_{st}(G)$  la cardinalità del più grande insieme di cammini internamente disgiunti da  $s$  a  $t$ .

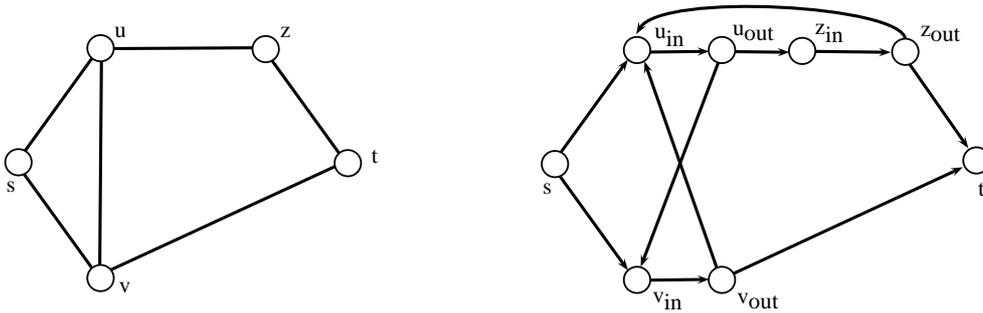
**Teorema 4.2.1.** [Menger, connettività sui vertici]

*Dato un grafo  $G(V, E)$  ed una coppia di vertici  $s, t \in V$  non adiacenti, vale  $k_{st} = \lambda_{st}$ .*

*Dimostrazione.* Analogamente alla dimostrazione della prima versione del Teorema di Menger (cfr. la Sezione 1.5), è semplice osservare  $k_{st}(G) \geq \lambda_{st}(G)$ : Ogni separatore che disconnette  $s$  e  $t$  contiene almeno un vertice intermedio in ogni cammino tra  $s$  e  $t$ . Quindi data una famiglia di  $\lambda_{st}$  cammini internamente disgiunti, ogni separatore che disconnette  $s$  da  $t$  deve contenere almeno un vertice intermedio in ciascuno di questi cammini.

Per l'implicazione opposta, si supponga senza perdita di generalità che  $G$  sia connesso e si costruisca il digrafo  $D(V', A)$  come segue: per ogni vertice  $v \in V$ ,  $v \neq s, t$ ,

si creino una coppia di vertici  $v_{in}$  e  $v_{out}$ . Per ogni arco  $uv \in E$  con  $u, v \neq s, t$ , si crei l'arco  $(u_{out}, v_{in})$  e l'arco  $(v_{out}, u_{in})$ . Per ogni arco  $ut \in E$ , si crei l'arco  $(u_{out}, t)$ . Per ogni arco  $us \in E$ , si crei l'arco  $(s, u_{in})$ . Infine per ogni  $u \in V$ ,  $u \neq s, t$ , si crei l'arco  $(u_{in}, u_{out})$ . Si veda l'esempio in Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Un grafo  $G$  ed il digrafo  $D$  corrispondente.

E' immediato osservare quanto segue.

**Claim 1:** Un cammino da  $s$  a  $t$  su  $D$  contiene un vertice  $v_{out}$  se e solo se contiene il vertice  $v_{in}$ .

Si noti che esiste una corrispondenza biunivoca tra cammini orientati da  $s$  a  $t$  in  $D$  e cammini tra  $s$  e  $t$  in  $G$ , ottenuta rimpiazzando ogni coppia  $(u_{in}, u_{out})$  con il vertice  $u$ , ed ogni arco orientato con il corrispondente arco non orientato. Inoltre è immediato osservare quanto segue:

**Claim 2:** Una famiglia di cammini da  $s$  a  $t$  su  $D$  è internamente disgiunta se e solo se la corrispondente famiglia di cammini tra  $s$  e  $t$  in  $G$  lo è.

**Claim 3:** Due cammini da  $s$  a  $t$  su  $D$  sono disgiunti sugli archi se e solo se sono internamente disgiunti.

*Dimostrazione.* Due cammini internamente disgiunti sono ovviamente disgiunti sugli archi (si noti che questa proprietà vale per un digrafo generico e non solo per il grafo  $D$  in esame). Per dimostrare l'implicazione opposta, è sufficiente mostrare che ogni coppia di cammini da  $s$  a  $t$  con un vertice interno in comune, hanno anche un arco in comune. Si considerino quindi due cammini  $P_1, P_2$  da  $s$  a  $t$  con un vertice interno  $v$  in comune. Per il Claim 1, possiamo assumere  $v = u_{in}$  per qualche  $u \in V$ . Poiché l'unico arco uscente da  $u_{in}$  è  $(u_{in}, u_{out})$ , tale arco appartiene a  $P_1$  ed a  $P_2$ , quindi  $P_1$  e  $P_2$  non sono disgiunti sugli archi.  $\square$

**Claim 4:** Esiste un taglio minimo  $\delta^+(S)$  che separa  $s$  da  $t$  in  $D$  che è formato da un sottoinsieme di archi di  $\cup_{v \in V} \delta^+(v_{in})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\delta^+(S)$  un taglio minimo che separa  $s$  da  $t$ . Dimostriamo anzitutto che esiste un taglio minimo senza archi di  $\cup_{u \in V} \delta^+(u_{out})$ . Supponiamo per contraddizione che non esista: tra tutti i tagli minimi, prendiamo uno con il numero minimo di archi in  $\cup_{u \in V} \delta^+(u_{out})$  e sia  $a$  uno di questi archi, con coda  $u_{out}$ . Se  $u_{in} \in S$ , allora il taglio  $\delta^+(S \setminus \{u_{out}\})$  rispetto a  $\delta^+(S)$  guadagna solamente l'arco  $(u_{in}, u_{out})$  (che è l'unico arco uscente da  $u_{in}$ ), mentre perde almeno un arco (cioè  $a$ ). Quindi  $|\delta^+(S \setminus \{u_{out}\})| \leq |\delta^+(S)|$ , i.e.  $\delta^+(S \setminus \{u_{out}\})$  è minimo, e contiene meno archi dell'insieme in  $\cup_{u \in V} \delta^+(u_{out})$ . Inoltre,  $\delta^+(S \setminus \{u_{out}\})$  separa  $s$  da  $t$ . Altrimenti,  $u_{in} \notin S$ , e possiamo analogamente mostrare che il taglio  $\delta^+((S \cup \{u_{in}\}) \setminus \{u_{out}\})$  separa  $s$  da  $t$ , ha cardinalità non inferiore a  $\delta^+(S)$  e contiene meno archi dell'insieme in  $\cup_{u \in V} \delta^+(u_{out})$ . In entrambi i casi, otteniamo una contraddizione. Quindi esiste un taglio minimo senza archi di  $\cup_{u \in V} \delta^+(u_{out})$ .

Dimostriamo ora che possiamo assumere  $\delta^+(S)$  contenga solo archi di  $\cup_{v \in V} \delta^+(v_{in})$ . Si noti che  $\delta^+(S) \cap \delta^+(t) = \emptyset$  per definizione, mentre abbiamo appena dimostrato che  $\delta^+(S) \cap (\cup_{u \in V} \delta^+(u_{out})) = \emptyset$ . Quindi è rimasto da dimostrare che  $\delta^+(S)$  non contiene archi di  $\delta^+(s)$ . Per farlo è possibile ripetere il ragionamento visto in precedenza, i.e. dato un arco  $(s, u_{in})$  del taglio si osserva che l'inserimento di  $u_{in}$  nella spiaggia del taglio non aumenta la cardinalità di quest'ultimo, mantenendolo al contempo un taglio che separa  $s$  da  $t$ .  $\square$

Applicando il Teorema 3.2.1 al grafo  $D$ , si ha  $k_{st}^A(D) = \lambda_{st}^A(D)$ . Per il Claim 3,  $\lambda_{st}^A(D)$  è anche la cardinalità della più grande famiglia di cammini da  $s$  a  $t$  su  $D$  internamente disgiunti e quindi per il Claim 2 la cardinalità della più grande famiglia di cammini tra  $s$  e  $t$  internamente disgiunti. Quindi

$$k_{st}^A(D) = \lambda_{st}(G). \quad (4.1)$$

Sia ora  $S' \subseteq S$  l'insieme di tutti e soli i nodi  $v \in S$  tale che  $\delta^+(v) \cap \delta^+(S) \neq \emptyset$ . Si noti che l'insieme  $\{v \in V : v_{in} \in S'\}$  è un separatore di  $G$  che disconnette  $s$  da  $t$ : infatti, per costruzione, non esiste nessun arco di  $D$  con coda in  $S \setminus S'$  e testa in  $\bar{S}$ . Per la definizione di  $D$ , questo implica che non esiste nessun arco di  $G$  tra

$\{s\} \cup \{v \in V : v_{in} \in S \setminus S'\}$  e  $V \setminus (\{s\} \cup \{v \in V : v_{in} \in S\})$ . Vale dunque:

$$\lambda_{st}(G) = k_{st}^A(D) = |\delta^+(S)| = |S'| \geq k_{st}(G),$$

dove la prima equazione segue da (4.1), la seconda dal fatto che  $\delta^+(S)$  è un taglio minimo che separa  $s$  da  $t$  in  $D$ , la terza dal fatto che, per il Claim 4,  $S'$  è fatto da nodi del tipo  $v_{in}$ , mentre la disuguaglianza dal fatto, argomentato sopra, che esiste in  $G$  un separatore che disconette  $s$  da  $t$  di taglia  $|S'|$ .  $\square$

Si noti che la precedente dimostrazione fornisce anche una procedura che, dato un algoritmo per computare  $k_{st}^A$ ,  $\lambda_{st}^A$  e gli insiemi che li realizzano, calcola i parametri  $k_{st}$ ,  $\lambda_{st}$  e gli insiemi che li realizzano. Si ricordi che un Algoritmo per il calcolo di  $k_{st}^A$ ,  $\lambda_{st}^A$  è stato fornito nella Sezione 3.3.



# Capitolo 5

## Albero ricoprente di peso minimo

### 5.1 Definizioni, algoritmo di Kruskal

In questo capitolo studiamo il seguente problema: dato un grafo semplice connesso  $G(V, E)$  ed un vettore di costi  $w$  nonnegativi sui suoi archi, si determini un sottografo  $G'(V, F)$  di  $G$  connesso e tale che la somma dei costi dei suoi archi sia minima tra tutti i grafi con questa proprietà. Si osservi che, senza perdita di generalità, possiamo ridurre a considerare sottografi di  $G$  che inducono alberi: data una qualunque soluzione  $F$  tale che  $G'(V, F)$  non è un albero, poiché  $G'$  è connesso, ha un ciclo  $C$ . Eliminando uno qualsiasi degli archi di  $C$ , ottengo una soluzione  $F'$  con costo non maggiore di  $F$ . Per questo il problema è detto dell'*albero ricoprente di peso minimo* (*minimum spanning tree*). Il seguente algoritmo, dovuto a Kruskal, trova una soluzione ottima al problema.

#### ALGORITMO DI KRUSKAL

*Input:* Un grafo  $G = (V, E)$  ed un vettore  $w$  di costi nonnegativi sui suoi archi. *Output:* Un insieme  $F \subseteq E$  tale che  $G'(V, F)$  è un albero ricoprente di peso minimo.

1. **Inizializzazione:** sia  $e_1, \dots, e_m$  un ordinamento degli archi di  $G$  tale che  $w_{e_1} \leq w_{e_2} \leq \dots \leq w_{e_k}$ . Si ponga  $F = \emptyset$ ;
2. **Ricorsione:** per  $j = 1, \dots, n - 1$ ,
  - (a) si scelga l'arco  $e_i \notin F$  con  $i$  minimo tale che  $G(V, F \cup \{e_i\})$  è aciclico;
  - (b) si ponga  $F = F \cup \{e_i\}$ ;

3. **STOP**;  $G'(V, F)$  è un minimo albero ricoprente.

L'ammissibilità e l'ottimalità della soluzione ottenuta dall'algoritmo di Kruskal può essere derivata dallo studio di un problema più generale. Un algoritmo come quello di Kruskal è detto *greedy* (avido, ingordo), poiché ad ogni passo sceglie l'arco di minimo costo tra quelli che mantengono il grafo aciclico (che, come detto nell'introduzione, è detto anche *foresta*), i.e. effettua una scelta localmente ottima.

## 5.2 Basi di matrici di incidenza in $\text{GF}_2$

Dato un grafo semplice  $G(V, E)$  ed un insieme  $F \subseteq E$ , indicheremo con  $c(F)$  l'insieme delle colonne della matrice di incidenza vertici-archi  $M$  di  $G$  ad esso associati. Indicheremo con  $c_i$  la colonna relativa all'arco  $e_i$ . In questa sezione, studiamo il rango della matrice  $M$  in  $\text{GF}_2$  (campo finito con due elementi), e vedremo come tale matrice è utile per il calcolo di un albero ricoprente di peso minimo. Si ricordi che, in  $\text{GF}_2$ , un insieme di colonne  $c(F)$  è *indipendente* se non esiste un vettore  $\lambda \in \{0, 1\}^n$  diverso dal vettore nullo tale che  $\sum_{i:e_i \in F} \lambda_i c_i = 0$ .

**Lemma 5.2.1.** *Sia  $G(V, E)$  un grafo con matrice di incidenza  $M$  e sia  $F \subseteq E$ . Allora  $c(F)$  è indipendente se e solo se  $G(V, F)$  non contiene un ciclo.*

*Dimostrazione.* Si noti che, per un qualsiasi insieme di colonne associato ad un insieme di archi  $F$ , la somma modulo 2 delle colonne dà, in corrispondenza della riga relativa a ciascun vertice  $v$ , la parità del numero di archi di  $F$  incidenti su  $v$ . Supponiamo che  $G(V, F)$  abbia un ciclo  $C$ . Poiché il numero di archi di  $C$  incidenti su ogni vertice di  $V$  è pari, la somma mod 2 delle colonne relative a  $C$  dà il vettore nullo. Quindi, ponendo  $\lambda_i = 1$  se  $e_i \in C$  e  $\lambda_i = 0$  altrimenti otteniamo  $\sum_{i:e_i \in F} \lambda_i c_i = 0$ .

Sia ora  $F \subseteq E$  tale che  $G(V, F)$  è una foresta e sia  $\lambda \in \{0, 1\}^n$  tale che  $\sum_{i:e_i \in F} \lambda_i c_i = 0$ . Dimostreremo che  $\lambda$  è il vettore nullo. Poiché  $G(V, F)$  è un foresta, ogni sua componente connessa o è atomica, o ha almeno due vertici di grado uno. Quindi  $G(V, F)$  ha almeno due vertici di grado uno. Se ne prenda uno, diciamo  $v$ : la riga di  $v$  ha un solo elemento pari ad 1, diciamo  $c_\ell$ , mentre tutti gli altri sono 0. Poiché  $\sum_{i:e_i \in F} \lambda_i c_i$  ne segue che  $\lambda_\ell = 0$ . Ponendo  $F' = F \setminus \{c_\ell\}$ , possiamo ripetere il ragionamento per  $F'$ , eliminare un altro arco, ed iterare. Otteniamo quindi che  $\lambda_i = 0$  per ogni  $e_i \in F$ .  $\square$

Si ricordi che una *base* di  $M$  è un insieme massimale (rispetto all'inclusione) di colonne indipendenti.

**Lemma 5.2.2.** *Sia  $G(V, E)$  connesso,  $F \subseteq E$ .  $c(F)$  definisce una base della matrice di incidenza di  $G$  se e solo se  $G'(V, F)$  è un albero.*

*Dimostrazione.* Poiché un albero è una foresta, dal Lemma 5.2.1, sappiamo che l'insieme  $c(F)$  è indipendente. Inoltre, sappiamo che in un albero l'aggiunta di un qualsiasi arco crea un ciclo, quindi  $c(F)$  è massimalmente indipendente. Supponiamo ora che  $F$  definisca una base. Usando ancora il Lemma 5.2.1, sappiamo che  $G'(V, F)$  è una foresta. Dobbiamo quindi dimostrare che  $G'$  è connesso. Supponiamo non lo sia: esiste un taglio  $\delta^{G'}(S)$  con  $S \neq \emptyset, V$  tale che  $\delta^{G'}(S)$  è vuoto. Poiché  $G$  è connesso, esiste un arco  $e$  di  $E \setminus F$  che appartiene a  $\delta^G(S)$ . Per quanto detto,  $e \notin F$ . Aggiungendo tale arco a  $G'$  otteniamo un grafo che è ancora aciclico, quindi per il Lemma 5.2.1  $c(F \cup \{e\})$  è indipendente e contiene strettamente  $F$ , contraddicendo l'ipotesi che  $F$  sia una base.  $\square$

Si noti che la matrice di incidenza di un grafo connesso non ha mai rango pieno in  $GF_2$  sulle righe, perché la somma modulo 2 delle sue componenti è pari ad 1. Utilizzando questa osservazione ed il Lemma 5.2.2 è semplice dimostrare quanto segue.

**Lemma 5.2.3.** *Il rango della matrice di incidenza di un grafo connesso  $G$  in  $GF_2$  è  $n - 1$ .*

Non è difficile estendere quanto visto a grafi non connessi.

**Lemma 5.2.4.** *Sia  $G(V, E)$  un grafo e  $F \subseteq E$ .  $c(F)$  definisce una base della matrice di incidenza di  $G$  se e solo se  $G'(V, F)$  è un sottografo massimalmente aciclico di  $G$ .*

**Lemma 5.2.5.** *Il rango della matrice di incidenza di un grafo  $G$  in  $GF_2$  è  $n - \gamma(G)$ .*

Per quanto osservato in questa sezione, il problema del minimo albero ricoprente può essere così riformulato: dato un grafo connesso  $G(V, E)$  con costi positivi sugli archi e la sua matrice di incidenza  $M$ , si trovi una base di  $M$  in  $GF_2$  di costo minimo, ove il costo di una base è dato dalla somma dei costi degli archi associati alle sue colonne. Nel prossimo paragrafo mostreremo che il concetto di base di una matrice  $M$  in un generico campo  $\mathcal{C}$  è a sua volta generalizzato dalle basi dei *matroidi*.

### 5.3 Matroidi e algoritmo greedy

Sia  $E = \{e_1, \dots, e_k\}$  un insieme di oggetti, ed  $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ ,  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ .  $(E, \mathcal{F})$  è un *matroide* se

- (i) se  $I_1 \in \mathcal{F}$  e  $I_2 \subseteq I_1$ , allora  $I_2 \in \mathcal{F}$ ;
- (ii) se  $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$  e  $|I_2| < |I_1|$ , allora esiste  $e \in I_1$  tale che  $I_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ .

Gli insiemi  $I \in \mathcal{F}$  sono detti *indipendenti*. Un insieme indipendente massimale è detto una *base*. Dalla proprietà (ii), segue che tutte le basi di un matroide hanno stessa cardinalità. Data una matrice  $M$  con valori su un campo  $\mathcal{C}$ , definiamo  $C$  come l'insieme delle colonne di  $M$ , e  $\mathcal{F}_M$  come la famiglia di tutti sottoinsiemi  $S$  di  $C$  tali che i vettori associati alle colonne di  $S$  sono indipendenti in  $\mathcal{C}$ . E' immediato verificare che  $\mathcal{F}_M \neq \emptyset$ , e che  $(C, \mathcal{F}_M)$  verifica la proprietà (i) dei matroidi. La proprietà (ii) segue invece dal seguente noto teorema di algebra.

**Teorema 5.3.1.** *Siano  $V$  e  $U$  insiemi finiti di vettori indipendenti su un campo  $\mathcal{C}$ , con  $|U| > |V|$ . Allora esiste un vettore  $u \in U$  tale che  $V \cup \{u\}$  è un insieme di vettori indipendenti in  $\mathcal{C}$ .*

Per quanto detto nel precedente paragrafo, dato un grafo  $G(V, E)$ , l'insieme  $(E, \mathcal{F}_G)$  è un matroide, dove  $\mathcal{F}_G = \{F \subseteq E : G'(V, F) \text{ è una foresta}\}$ . Forniamo ora una dimostrazione combinatoria di quest'ultimo risultato.

**Lemma 5.3.2.** *Dato un grafo  $G(V, E)$ , l'insieme  $(E, \mathcal{F}_G)$  è un matroide.*

*Dimostrazione.* Banalmente  $G(V, \emptyset)$  è una foresta, quindi  $\mathcal{F}_G \neq \emptyset$ . Poiché un sottografo di una foresta è anch'esso una foresta,  $(E, \mathcal{F}_G)$  verifica (i). Siano  $F, F' \in \mathcal{F}_G$  e  $|F| < |F'|$ . Supponiamo per assurdo che per ogni  $e \in F'$ ,  $F \cup \{e\} \notin \mathcal{F}_G$ . Per definizione di  $\mathcal{F}_G$ , l'aggiunta di ogni arco di  $F'$  ad  $F$  crea un ciclo in  $G'(V, F)$ . Quindi, per ogni arco  $e = uv \in F'$ ,  $u, v$  sono nella stessa componente connessa di  $G(V, F)$ .

**Claim 1:**  $\gamma(G'(V, F)) \leq \gamma(G''(V, F'))$ .

*Dimostrazione.* Si prendano due vertici  $u, v$  di una componente connessa di  $F'$  e sia  $P = v = v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k = u$  il path su  $G''(V, F')$  che li connette. Allora per quanto

osservato sopra, per  $i = 1, \dots, k - 1$ , i vertici  $v_i, v_{i+1}$  sono nella stessa componente connessa di  $G'$ . Per la transitività della connessione,  $u, v$  sono nella stessa componente connessa di  $G'$ , da cui la tesi.  $\square$

Dal Lemma 1.4.3, si ha  $|V| = \gamma(G') + m(G') = \gamma(G'') + m(G'')$ . Poiché  $m(G') = |F| < |F''| = m(G'')$ , otteniamo  $\gamma(G') > \gamma(G'')$ , una contraddizione al Claim 1.  $\square$

Il problema dell'albero ricoprente può quindi essere visto come un caso particolare del seguente problema: dato un matroide  $(E, \mathcal{F}_G)$  ed un vettore di costo  $w$  associato agli oggetti di  $E$ , si trovi una base di  $\mathcal{F}_G$  di costo minimo. Per semplicità di notazione, indicheremo con  $w_i$  il costo dell'elemento  $e_i$ . L'algoritmo di Kruskal può essere generalizzato come segue:

#### ALGORITMO GREEDY PER MATROIDI

*Input:* Un matroide  $(E, \mathcal{F})$ . *Output:* Una base di  $\mathcal{F}$  di costo minimo.

1. **Inizializzazione:** sia  $e_1, \dots, e_m$  un ordinamento degli oggetti di  $E$   $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$ . Si ponga  $F = \emptyset$ ;
2. **Ricorsione:** finchè  $F$  non è una base:
  - (a) si scelga l'oggetto  $e_i \notin F$  con  $i$  minimo tale che  $F \cup \{e_i\}$  è indipendente;
  - (b) si ponga  $F = F \cup \{e_i\}$ ;
3. **STOP;**  $F$  è la base cercata.

**Teorema 5.3.3.** *L'algoritmo Greedy per Matroidi restituisce la base di costo minimo.*

*Dimostrazione.* Si noti che, dalla proprietà (i) dei matroidi,  $\emptyset$  è un insieme indipendente. Inoltre, per costruzione, ad ogni passo dell'algoritmo l'insieme  $F$  è ancora un insieme indipendente. Quindi, al termine dell'algoritmo,  $F$  è una base.

**Claim 1:** Se ad un passo  $p$  dell'algoritmo è inserito l'elemento  $e_\ell$ , allora in tutti i passi successivi non sarà inserito nessun elemento  $e_{\ell'}$  con  $\ell' < \ell$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\overline{F}$  l'insieme dopo creato dall'algoritmo dopo  $p$  passi e supponiamo esista un insieme  $\tilde{F}$  creato ad un passo  $p' > p$  inserendo un elemento  $e_{\ell'}$ , con  $\ell' < \ell$ . Poiché  $\overline{F}$  e  $\tilde{F}$  sono insiemi indipendenti per costruzione,  $(\overline{F} \setminus \{e_{\ell}\}) \cup \{e_{\ell'}\} \subseteq \tilde{F}$  è un insieme indipendente, per la proprietà (ii) dei matroidi. Questo contraddice il fatto che al passo  $p$  dell'algoritmo sia stato scelto  $e_{\ell}$  invece di  $e_{\ell'}$ .  $\square$

Supponiamo ora per assurdo che la base  $F$  costruita al termine dell'algoritmo non sia ottima, i.e. esiste un'altra base  $F'$  con costo minore di  $F$ . Poiché le basi hanno stessa cardinalità,  $|F| = |F'|$ . Siano  $F = \{e_{n_1}, \dots, e_{n_k}\}$ , e  $F' = \{e_{n'_1}, \dots, e_{n'_k}\}$ , con  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  e  $n'_1 < n'_2 < \dots < n'_k$ . Si noti che questo implica che  $w_{n_1} \leq w_{n_2} \leq \dots \leq w_{n_k}$  e  $w_{n'_1} \leq w_{n'_2} \leq \dots \leq w_{n'_k}$ . Poiché  $\sum_{i=1}^k w_{n'_i} < \sum_{i=1}^k w_{n_i}$ , esiste un indice  $j$  tale che  $w_{n_j} > w_{n'_j}$ . Si definiscano ora  $F_{j-1} = \{e_{n_1}, \dots, e_{n_{j-1}}\}$  ed  $F'_j = \{e_{n'_1}, \dots, e_{n'_j}\}$ .

**Claim 2:**  $F_{j-1}$  è l'insieme costruito dall'algoritmo dopo  $j - 1$  passi.

*Dimostrazione.* Sia  $\overline{F}$  l'insieme creato dall'algoritmo dopo  $j - 1$  passi. Se  $\overline{F} \neq F_{j-1}$ , esistono due indici  $t$  ed  $\ell$  con  $t \leq j - 1$  e  $\ell \geq j$ , tale che  $e_{n_t} \notin \overline{F}$ ,  $e_{n_\ell} \in \overline{F}$ . Poiché  $e_{n_t} \in F$ ,  $e_{n_t}$  è inserito dall'algoritmo nell'insieme indipendente in qualche passo successivo a  $j - 1$ . Poiché  $n_t < n_\ell$ , questo contraddice il Claim 1.  $\square$

Per il Claim 2,  $F_{j-1}$  è l'insieme costruito dall'algoritmo dopo  $j - 1$  passi. Per la proprietà (i) e (ii) dei matroidi,  $F_{j-1}$  ed  $F'_j$  sono insiemi indipendenti. Poiché  $|F_j| = |F'_j| - 1$ , per la proprietà (ii), esiste un elemento  $e_{n'_t}$  di  $F'_j \setminus F_j$  tale che  $F_j \cup \{e_{n'_t}\}$  è un insieme indipendente. Poiché  $t \leq j$ , si ha  $n'_t < n'_j$  e quindi  $w_{n'_t} \leq w_{n'_j} < w_{n_j}$ . Questo contraddice la scelta di  $e_{n_j}$  al  $j$ -mo passo dell'algoritmo.  $\square$

Dal Lemma 5.3.2 e dal Teorema 5.3.3 otteniamo quanto segue.

**Corollario 5.3.4.** *L'algoritmo di Kruskal è corretto, i.e. il suo output è un albero ricoprente di costo minimo.*

## Esercizi

**Esercizio 5.1** Si dimostri il Lemma 5.2.3.

**Esercizio 5.2** Si dimostri il Lemma 5.2.4.

**Esercizio 5.3** Si dimostri il Lemma 5.2.5.



# Capitolo 6

## Grafi $k$ -connessi

### 6.1 Definizioni e proprietà generali

In teoria dei grafi, le proprietà di grafi con una data connettività sui vertici rivestono un ruolo centrale. Queste proprietà costituiscono infatti importanti strumenti per dimostrare teoremi più complessi.

Dato un arco  $e = uv$  di  $G$ , il grafo  $G^e$  consiste nel grafo ottenuto dalla *suddivisione* di  $e$ , i.e. il grafo ottenuto da  $G$  rimuovendo l'arco  $e$  da  $G$  e aggiungendo un nuovo vertice  $w$  insieme agli archi  $uw, vw$ . Dati  $u, v, z \in V$ , un cammino  $P = u, a_1, \dots, v$ , ed un cammino  $P' = v, a'_1, \dots, z$ , la *concatenazione di  $P$  e  $P'$*  è il cammino  $u, a_1, \dots, v, a'_1, \dots, z$ . Dato un cammino  $P = v_1, a_1, \dots, a_{k-1}, v_k$ ,  $P'$  è un *sottocammino* di  $P$  se vale  $P' = v_\ell, a_\ell, \dots, a_{t-1}, v_t$  per qualche coppia di interi  $1 \leq \ell \leq t \leq k$ .

**Lemma 6.1.1.** *Sia  $G(V, E)$  un grafo, ed  $e \in E$ . Allora  $k(G_{\setminus e}) \geq k(G) - 1$ .*

*Dimostrazione.* Si noti che è sufficiente dimostrare il lemma assumendo  $G$  semplice. Se  $G$  è un grafo completo, è immediato verificare che il teorema è valido: per ogni arco  $e = uv \in E$  di  $K_n$ , l'unico separatore di  $K_{n \setminus e}$  è dato da  $V \setminus \{u, v\}$ , che ha cardinalità  $n - 2$ . Poiché  $k(K_n) = n - 1$ , il teorema è valido.

Assumiamo quindi che  $G$  non sia completo, quindi  $k(G) \leq n(G) - 2$ . Supponiamo, per contraddizione, che  $k(G_{\setminus e}) \leq k(G) - 2$  per qualche  $e = uv \in E$ . Quindi esiste un separatore  $S$  di  $G' = G_{\setminus e}$  di cardinalità al più  $k(G) - 2$ . Poiché  $S$  non è un separatore di  $G$ ,  $u$  e  $v$  sono in due componenti connesse distinte di  $G'$ . Mostriamo ora

che  $V \setminus S = \{u, v\}$ . Sia infatti  $w$  un vertice distinto da  $u, v$  in  $V \setminus S$ . Assumiamo senza perdita di generalità che  $w$  non appartenga alla componente connessa di  $v$  in  $G'$ . Quindi  $S \cup \{u\}$  è un separatore di cardinalità al più  $k(G) - 1$  che separa  $w$  da  $v$  in  $G$ , una contraddizione al fatto che  $G$  sia  $k$ -connesso. Questo implica  $V = S \cup \{u, v\}$ , da cui si deriva la contraddizione  $|S| = n(G) - 2 = k(G) \leq k(G) - 2 \leq n(G) - 4$ .  $\square$

**Teorema 6.1.2.** *Sia  $G(V, E)$   $k$ -connesso. Per ogni  $u, v$  esistono  $k$  cammini internamente disgiunti su  $G$ .*

*Dimostrazione.* Se  $u, v$  sono non adiacenti, la tesi segue dal Teorema 4.2.1. Altrimenti, dal Lemma 6.1.1,  $k(G_{\setminus uv}) \geq k(G) - 1 = k - 1$ . Per il Teorema 4.2.1, esistono almeno  $k - 1$  cammini internamente disgiunti da  $u$  a  $v$  su  $G_{\setminus uv}$ . Aggiungendo a tale famiglia il cammino  $u, uv, v$ , otteniamo i  $k$  cammini internamente disgiunti da  $u$  a  $v$  su  $G$  richiesti.  $\square$

## 6.2 Grafi 2-connessi

Un concetto utile per studiare i grafi 2-connessi è quello di *orecchia*. Dato un grafo  $G(V, E)$ , una *orecchia* (*ear*)  $O$  di  $G$  è un cammino le cui estremità sono vertici *distinti* di  $G$ , mentre tutti i vertici intermedi non appartengono a  $G$ . Il grafo  $G + O$  è il grafo che ha come insieme di vertici l'unione tra  $V$  ed i vertici di  $O$ , e come archi l'unione tra  $E$  e gli archi di  $O$ . Un grafo che può essere scritto come  $G + O$  è detto *costruito da  $G$  aggiungendo un'orecchia*. Si noti che l'aggiunta di un singolo arco nel grafo può essere interpretato come l'aggiunta di un'orecchia.

**Lemma 6.2.1.** *Sia  $G$  un grafo 2-connesso. Per ogni coppia di vertici, esiste un ciclo di  $G$  che li contiene.*

*Dimostrazione.* Sia  $u, v$  una coppia di vertici distinti. Dal Teorema 6.1.2 esistono un cammino da  $u$  a  $v$  ed un cammino da  $v$  ad  $u$  che sono internamente disgiunti. La loro concatenazione è il ciclo cercato.  $\square$

Si noti che il lemma precedente non è vero se sostituiamo *tripla* a *coppia*. Di seguito illustriamo alcune operazioni su grafo che preservano la 2-connessione. Alcune dimostrazioni sono lasciate come esercizio.

**Lemma 6.2.2.** *Sia  $G$  un grafo 2-connesso. Il grafo ottenuto aggiungendo un nuovo vertice a  $G$  e rendendolo adiacente a 2 vertici distinti di  $G$  è anch'esso 2-connesso.*

**Lemma 6.2.3.** *Sia  $G$  un grafo 2-connesso. Allora per ogni arco  $e$  di  $G$ ,  $G^e$  è 2-connesso.*

**Lemma 6.2.4.** *Sia  $G'$  un grafo ottenibile da un grafo  $G$  tramite l'aggiunta di una orecchia, e sia  $G$  2-connesso. Allora  $G'$  è 2-connesso.*

*Dimostrazione.* Si noti che l'aggiunta di un'orecchia può essere interpretata come l'aggiunta di un arco, seguita da una successione finita di suddivisioni. La tesi quindi segue dai Lemma 6.2.2, 6.2.3.  $\square$

Dimostriamo ora il seguente rafforzamento del Lemma 6.2.1.

**Lemma 6.2.5.** *Sia  $G$  un grafo 2-connesso. Per ogni coppia di archi  $e_1, e_2$ , esiste un ciclo di  $G$  che li contiene.*

*Dimostrazione.* Sia  $e_i = u_i w_i$  per  $i = 1, 2$ . Si consideri il grafo  $G'$  ottenuto aggiungendo due vertici  $v_1, v_2$  a  $G$ , con  $v_i$  adiacente alle estremità di  $e_i$  per  $i = 1, 2$ . Dal Lemma 6.2.1, esiste un ciclo  $C$  di  $G'$  che contiene  $v_1$  e  $v_2$ . Senza perdita di generalità, possiamo assumere che  $C$  sia del tipo  $v_1, v_1 u_1, u_1, \dots, u_2, u_2 v_2, v_2, v_2 w_2, w_2, \dots, w_1, w_1 v_1, v_1, u_1, \dots, u_2, e_2, w_2, \dots, w_1, e_1, u_1$  è dunque il ciclo di  $G$  cercato.  $\square$

La sequenza dei lemma appena dimostrati è utile per fornire una prima caratterizzazione dei grafi 2-connessi.

**Teorema 6.2.6.**  *$G$  è 2-connesso se e solo se  $G$  può essere ottenuto da un ciclo di lunghezza  $\geq 3$  aggiungendo orecchie.*

*Dimostrazione.* Un ciclo di lunghezza  $\geq 3$  è trivialmente 2-connesso. Poiché l'operazione di aggiunta di orecchie preserva la 2-connessione (Lemma 6.2.4), allora  $G$  è 2-connesso.

Sia  $G$  un grafo 2-connesso, e sia  $C$  un ciclo di  $G$ . Sia  $F$  un sottografo massimale di  $G$  ottenuto da  $C$  tramite l'aggiunta di orecchie; in particolare, per una qualsiasi orecchia  $O$  di  $F$ ,  $F + O$  non è un sottografo di  $G$ . Se  $F \equiv G$ , la dimostrazione è conclusa; altrimenti, esiste almeno un arco  $e = uv$  di  $G$  che non appartiene ad  $F$ . Sia

inoltre  $e' = u'v'$  un qualsiasi arco di  $F$ . Poiché  $G$  è 2-connesso, esiste un ciclo  $C'$  di  $G$  che contiene  $e$  ed  $e'$ . Senza perdita di generalità, possiamo assumere che  $C'$  sia del tipo  $v_1 = v, uv, v_2 = u, a_2 \dots, a_{k-1}v_k = v$ . Sia  $u''$  il primo vertice di  $C'$  che appartiene ad  $F$ , e  $v''$  l'ultimo vertice di  $C'$  che appartiene ad  $F$ . Si noti che  $u'', v''$  esistono e sono distinti, poiché  $u', v'$  sono vertici distinti di  $F$ .  $C'$  è quindi dato dalla concatenazione di un cammino  $P_1$  da  $v$  a  $u''$  internamente disgiunto da  $F$ , un cammino da  $u''$  a  $v''$  che contiene l'arco  $u'v'$  ed un cammino  $P_2$  da  $v''$  a  $v$  internamente disgiunto da  $F$ . Si noti che il cammino ottenuto concatenando  $P_2$  e  $P_1$  è un'orecchia di  $F$ , che denotiamo con  $O$ . Poiché  $F + O$  è un sottografo di  $G$ , contraddiciamo la massimalità di  $F$ . Questo implica che deve valere  $F \equiv G$ , cioè la tesi.  $\square$

Si noti che la dimostrazione del teorema precedente ci dice inoltre che è possibile partire da un *qualsiasi* ciclo di  $G$  e costruire  $G$  aggiungendo iterativamente orecchie. Un semplice corollario è il prossimo, lasciato per esercizio.

**Lemma 6.2.7.** *Un grafo è 2-connesso se e solo se può essere ottenuto da  $K_3$  tramite operazioni di aggiunta e suddivisione di archi.*

### 6.2.1 Applicazione della 2-connessione allo studio dei grafi fortemente connessi

Applichiamo i risultati del paragrafo precedente allo studio dei grafi orientati. In particolare, siamo interessati a rispondere alla seguente domanda: dato un grafo non orientato  $G(V, E)$ , è possibile orientare gli archi di  $E$  in modo che il grafo  $D(V, A)$  risultante sia fortemente connesso? Un tale orientamento degli archi è detto *fortemente connesso*. Il seguente teorema, che non dimostriamo, fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo ammetta un tale orientamento.

**Teorema 6.2.8.** *Un grafo  $G(V, E)$  ammette un orientamento fortemente connesso se e solo se ogni taglio  $\delta(S)$  con  $S \neq \emptyset, V$  ha cardinalità almeno 2.*

Al fine di dimostrare il teorema precedente, sarebbe utile dimostrare il seguente analogo del Teorema 6.2.6. Un'orecchia *chiusa* è un cammino che ha le stesse proprietà di un'orecchia, con l'unica differenza che le sue estremità possono coincidere.

**Teorema 6.2.9.** *Un grafo  $G$  è 2-arcoconnesso se e solo se  $G$  può essere ottenuto da un ciclo aggiungendo orecchie chiuse.*

Dimostriamo invece un risultato un po' più debole del Teorema 6.2.8. Iniziamo con un lemma, analogo al Lemma 6.2.4.

**Lemma 6.2.10.** *Sia  $D(V, E)$  un digrafo fortemente connesso, e sia  $D'$  il grafo ottenuto da  $D$  aggiungendo un'orecchia  $v_1, a_1, v_2, \dots, a_{k-1}, v_k$  ed orientando ogni arco  $a_i$  dell'orecchia come  $(v_i, v_{i+1})$ . Allora,  $D'$  è fortemente connesso.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi, per ogni  $u, v \in V$ , esiste un cammino da  $u$  a  $v$  ed un cammino da  $v$  ad  $u$  che utilizzano solo archi di  $E$ . Quindi  $u, v$  sono fortemente connessi in  $D'$ . Inoltre, in particolare, ogni vertice di  $D$  è connesso a  $v_1$ . Per l'orientamento degli archi nell'orecchia,  $v_1$  è banalmente connesso ad ogni vertice di  $O$ . Dalla transitività della connessione, ogni vertice di  $D$  è connesso ad un vertice dell'orecchia. Analogamente si dimostra che ogni vertice dell'orecchia è connesso ad ogni vertice di  $D$ . Rimane da dimostrare che, per ogni coppia ordinata  $(v_\ell, v_t)$  di vertici distinti di  $O$ , esiste un cammino orientato da  $v_\ell$  a  $v_t$  in  $D'$ . Se  $t > \ell$  il cammino è banalmente contenuto nell'orecchia. Altrimenti  $t < \ell$  e tale cammino è ottenibile concatenando il cammino da  $v_\ell$  a  $v_k$  sull'orecchia, il cammino tra  $v_k$  e  $v_1$  nel grafo  $D$  ed il cammino tra  $v_1$  e  $v_t$  sull'orecchia.  $\square$

**Teorema 6.2.11.** *Se un grafo  $G$  è 2-connesso, allora  $G$  ammette un'orientamento fortemente connesso.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  2-connesso: il Teorema 6.2.6 ci garantisce che  $G$  può essere ottenuto da un ciclo aggiungendo orecchie. La dimostrazione procede per induzione sul numero di orecchie  $k$  di  $G$ . Se  $k = 0$ , allora  $G$  è un ciclo, diciamo  $v_1, a_1, \dots, a_{k-1}, v_k$  e l'orientamento è banalmente quello dato da  $(v_i, v_{i+1})$  per ogni arco  $a_i$ . Sia ora  $G$  ottenuto aggiungendo al ciclo  $k \geq 1$  orecchie: quindi  $G = F + O$ , dove  $F$  è ottenuto aggiungendo  $k - 1$  orecchie ed  $O$  è una orecchia. Per ipotesi induttiva,  $F$  ammette un'orientamento fortemente connesso. La tesi segue allora dal Lemma 6.2.10.  $\square$

## 6.3 Ancora sui grafi $k$ -connessi

**Teorema 6.3.1.** *Per ogni grafo  $G$ ,  $k^E(G) \geq k(G)$ .*

*Dimostrazione.* Per definizione,  $k(G) = \min_{s,t \in V} k_{st}(G)$ . Dal Teorema 4.2.1,  $k(G)$  è pari al massimo valore  $\lambda$  tale che, per ogni  $s, t \in G$ , esistono  $\lambda$  cammini tra  $s$  e  $t$  che sono internamente disgiunti. Similmente, utilizzando il Teorema 2.3.1, otteniamo che  $k^E(G)$  è il massimo valore  $\lambda^E$  tale che esistono  $\lambda^E$  cammini tra  $s$  e  $t$  che sono disgiunti sugli archi. Poiché ogni famiglia di cammini disgiunti sui vertici è anche disgiunta sugli archi, vale  $\lambda^E \geq \lambda$  e quindi la tesi.  $\square$

Alcune delle proprietà dimostrate per grafi 2-connessi possono essere generalizzate a grafi  $k$ -connessi. Un esempio è dato dal prossimo lemma, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

**Lemma 6.3.2.** *Sia  $G$  un grafo  $k$ -connesso. Il grafo ottenuto aggiungendo un nuovo vertice a  $G$  e rendendolo adiacente a  $k$  vertici distinti di  $G$  è anch'esso  $k$ -connesso.*

Anche il Lemma 6.2.1 può essere generalizzato a grafi  $k$ -connessi. Al fine di dimostrarlo, proviamo anzitutto due celebri lemma. I cammini di una data famiglia si dicono *completamente disgiunti* se non hanno nessun vertice (e quindi nessun arco) in comune.

**Lemma 6.3.3.** [Linking Lemma] *Sia  $G(V, E)$   $k$ -connesso, e siano  $S, T$  sottoinsiemi di  $V$ , ciascuno di cardinalità almeno  $k$ . Allora esistono  $k$  cammini completamente disgiunti da  $S$  a  $T$ .*

*Dimostrazione.* Si consideri il grafo  $G'$  ottenuto aggiungendo vertici  $s$  e  $t$ , e collegando  $s$  a tutti i vertici in  $S$ , e  $t$  a tutti i vertici in  $T$ . Si vertici che  $G'$  è ancora  $k$ -connesso, per il Lemma 6.3.5. Per il Teorema 4.2.1, esistono  $k$  cammini internamente disgiunti tra  $s$  e  $t$ . Eliminando il primo vertice, il primo arco, l'ultimo vertice e l'ultimo arco da ciascuno di questi cammini, otteniamo i  $k$  cammini completamente disgiunti tra  $S$  e  $T$  in  $G$ .  $\square$

Si noti che, nel teorema precedente, non abbiamo richiesto che gli insiemi  $S$  e  $T$  siano disgiunti (un cammino da un vertice a se stesso è infatti, banalmente, il vertice stesso). Inoltre, non è possibile richiedere a priori *quale* vertice di  $S$  sia connesso ad un fissato vertice di  $T$ . Più precisamente, se un grafo è  $k$ -connesso ed  $s \in S$ ,  $t \in T$ , è possibile non esista un insieme di  $k$  cammini completamente disgiunti da  $S$  a  $T$  tale che uno di questi abbia come estremità  $s$  e  $t$ .

Analogamente al Linking Lemma, si dimostra il seguente.

**Lemma 6.3.4.** [Fan Lemma]

Sia  $G(V, E)$   $k$ -connesso,  $T$  un sottoinsieme di  $V$  di cardinalità almeno  $k$  ed  $s \in V$ . Allora esistono  $k$  cammini da  $s$  a  $T$  tali che l'unico vertice in comune tra ciascuna coppia di tali cammini è  $s$ .

Possiamo ora enunciare e dimostrare una generalizzazione del Lemma 6.2.1.

**Lemma 6.3.5.** Sia  $G$   $k$ -connesso. Per ogni insieme di  $k$  vertici, esiste un ciclo di  $G$  che li contiene.

*Dimostrazione.* Sia  $\{v_1, \dots, v_k\}$  l'insieme di  $k$  vertici dato. Supponiamo che il teorema sia falso, e sia  $C$  un ciclo che minimizza  $|\{v_1, \dots, v_k\} \setminus C|$ . Senza perdita di generalità, possiamo assumere che  $v_1 \notin C$ .

Dimostriamo anzitutto il lemma nel caso  $|C| \geq k$ . Per il Fan Lemma (Lemma 6.3.4), esistono  $k$  cammini  $P_1, \dots, P_k$  tra  $v_1$  ed i vertici di  $C$  e tali che l'unico vertice in comune tra ogni coppia di tali cammini è  $v_1$ . Possiamo inoltre assumere che l'intersezione di ciascuno cammino  $P_i$  con il ciclo  $C$  sia dato esattamente dall'estremità del cammino distinta da  $v_1$ . Definiamo *segmento* un sottocammino di  $C$  con le seguenti due proprietà: ciascuna delle sue estremità è un'estremità di uno dei cammini  $P_1, \dots, P_k$ ; nessun suo vertice interno è un'estremità di uno dei cammini  $P_1, \dots, P_k$ . Si noti che ci sono esattamente  $k$  segmenti e ogni coppia di segmenti è internamente disgiunta. Un segmento è *buono* se non ha vertici dell'insieme  $\{v_2, \dots, v_k\}$  come vertici interni. Si noti che c'è almeno un segmento buono, diciamo  $P' = v'_1, a'_1, \dots, a'_{k'-1}, v'_{k'}$ , poiché ogni vertice è interno ad al più un segmento. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che il ciclo  $C$  sia  $v''_1, a''_1, v''_2, \dots, a''_{k''-1}, v''_{k''}$  con  $v''_1 = v''_{k''} = v'_1$  e  $a''_{k''-1} = a'_1$ . Di conseguenza, eliminando da  $C$  gli archi ed i vertici interni di  $P'$ , otteniamo il cammino  $P''$  dato da  $v'_1 = v''_1, a''_1, v''_2, \dots, a''_{k''-k'}, v''_{k''-k'+1} = v'_{k'}$ . Poiché  $P'$  è buono,  $P'' \cap \{v_1, \dots, v_k\} = C \cap \{v_1, \dots, v_k\}$ . Per ipotesi, esistono cammini  $P_1$  tra  $v_1$  e  $v'_1$  e  $P_2$  tra  $v'_{k'}$  e  $v_1$  che sono internamente disgiunti tra loro, e tale che  $P_1$  (rispettivamente  $P_2$ ) interseca  $C$  e quindi  $P''$  solamente in  $v'_1$  (rispettivamente  $v'_{k'}$ ). La concatenazione di  $P_1$ ,  $P''$  e  $P_2$  dà un ciclo che ha intersezione con  $\{v_1, \dots, v_k\}$  strettamente maggiore di  $C$  (contiene infatti  $v_1$ , oltre a tutti i vertici di  $\{v_2, \dots, v_k\} \cap C$ ), ottenendo una contraddizione.

Supponiamo ora che  $|C| \leq k - 1$ . Poiché  $G$  è  $k$ -connesso, è anche  $|C|$ -connesso. Ripetiamo dunque il ragionamento fatto nel caso precedente: per il Fan Lemma (Lemma 6.3.4), esistono  $|C|$  cammini  $P_1, \dots, P_{|C|}$  tra  $v_1$  ed i vertici di  $C$  e tali che l'unico vertice in comune tra ogni coppia di tali cammini è  $v_1$ . Si noti che ogni cammino  $P_1, \dots, P_{|C|}$  interseca  $C$  solamente nella propria estremità distinta da  $v_1$ . Sia  $C$  dato da  $v'_1, a'_1, \dots, v'_{k'-1}, a'_{k'-1}, v'_{k'}$  e siano  $P_1$  e  $P_2$  i cammini internamente disgiunti rispettivamente tra  $v_1$  e  $v'_1$ , e tra  $v'_{k'-1}$  e  $v_1$ . Per costruzione,  $P_1 \cap C = \{v_1\}$ ,  $P_2 \cap C = \{v_2\}$ . Allora la concatenazione di  $P_1$ , di  $v'_1, a'_1, \dots, v'_{k'-1}$  e  $P_2$  dà un ciclo che ha intersezione con  $\{v_1, \dots, v_k\}$  strettamente maggiore di  $C$  (contiene infatti  $v_1$ , oltre a tutti i vertici di  $\{v_2, \dots, v_k\} \cap C$ ), ottenendo una contraddizione.  $\square$

## 6.4 Grafi 3-connessi

Un arco  $uv$  di un grafo 3-connesso  $G(V, E)$  è detto *contraibile* se  $G_{/\{u,v\}}$  è 3-connesso.

**Teorema 6.4.1.** *Un grafo 3-connesso con almeno 5 vertici contiene un arco contraibile.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un grafo 3-connesso  $G$  con almeno 5 vertici e  $xy$  un arco di  $G$  non contraibile. Indichiamo con  $\bar{x}$  il vertice di  $G' = G_{/\{x,y\}}$  corrispondente alla contrazione di  $x, y$ . Enunciamo alcune semplici proprietà, lasciando per esercizio la dimostrazione della prima.

**Claim 1:** Sia  $S'$  un separatore di  $G'$ . Se  $\bar{x} \notin S'$ , allora  $S'$  è un separatore di  $G$ ;

**Claim 2:** Esiste un vertice  $z \in V \setminus \{x, y\}$  tale che  $S = \{x, y, z\}$  è un separatore di  $G$ .

*Dimostrazione.* Sia  $S'$  un separatore di cardinalità minima in  $G'$ . Poiché  $G'$  non è 3-connesso ed  $n(G') \geq 4$ , vale  $|S'| \leq 2$ . Si noti che  $S'$  non è un separatore di  $G$ , altrimenti contraddirebbe la 3-connessione di  $G$ . Dal Claim 1, deduciamo quindi che  $\bar{x} \in S'$ . Inoltre,  $|S'| \geq 2$ , altrimenti  $\{x, y\}$  sarebbe un separatore di  $G$  di cardinalità 2. Quindi  $S' = \{\bar{x}, z\}$  per qualche  $z \in V \setminus \{x, y\}$ . Mostriamo ora che  $S = \{x, y, z\}$  è l'insieme richiesto. Si supponga per assurdo che  $S$  non sia un separatore in  $G$ : allora, per ogni coppia di vertici  $w, t$  di  $V \setminus S$ , esiste un cammino tra  $w, t$  che non passa per alcun vertice di  $S$ . Si noti che un tale cammino è anche un cammino tra  $w$  e  $t$  in  $G'$ , contraddicendo il fatto che  $S'$  sia un separatore in  $G'$ .

□

**Claim 3:** Sia  $S$  un separatore di  $G$  di cardinalità minima. Allora, ogni vertice di  $S$  ha un vicino in ciascuna delle componenti connesse di  $G \setminus S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $w$  un vertice di  $S$  che non ha adiacenti in qualche una componente  $C$  di  $G \setminus S$ . Allora  $S \setminus \{w\}$  è un separatore di  $G$  di cardinalità  $|S| - 1$  perché sconnette  $C$  dal resto del grafo. Questo contraddice il fatto che  $S$  sia un separatore di  $G$  di cardinalità minima. □

Supponiamo ora che il teorema sia falso e ne sia  $G$  un controesempio. Dal Claim 2, per ogni  $xy \in E$  esiste un vertice  $z$  tale che  $\{x, y, z\}$  è un separatore. Si scelga l'arco  $xy$  per cui la più grande (i.e. con il massimo numero di vertici) componente connessa di  $G \setminus \{x, y, z\}$  ha cardinalità massima. Sia  $F$  tale componente connessa, e si noti che per il Claim 3 ciascun vertice di  $S = \{x, y, z\}$  ha un vicino in  $F$ . Sia  $H = F \cup \{x, y\}$ .

**Claim 4:**  $G[H]$  è 2-connesso.

*Dimostrazione.*  $G[H]$  è connesso, poiché  $F$  è una componente connessa di  $G \setminus \{x, y, z\}$  ed  $x, y$  hanno un adiacente in  $F$  per il Claim 3. Supponiamo per assurdo che non sia 2-connesso. Allora,  $H$  ha un separatore di cardinalità 1, diciamo  $t$ . Si noti che  $t \neq x$  perché, rimuovendo  $x$  da  $H$ ,  $y$  rimane connesso a tutti i vertici di  $F$  per il Claim 3 e per costruzione di  $F$ . Similmente  $t \neq y$ . Quindi la rimozione di  $t$  in  $H$  separa  $x$  da un altro vertice di  $H$ , diciamo  $u$ . Poiché  $xy \in E$ , allora  $u \neq y$  e la rimozione di  $t$  separa anche  $y$  da  $u$ . È quindi immediato verificare che la rimozione di  $\{t, z\}$  in  $G$  separa  $x$  da  $u$ , i.e.  $\{t, z\}$  è un separatore di  $G$ . Questo contraddice la 3-connessione di  $G$ . □

Poiché  $G$  è 3-connesso ed  $S$  è un separatore di  $G$ ,  $V \setminus (F \cup S) \neq \emptyset$ . Per il Claim 3, esiste un vertice  $v \in V \setminus (F \cup S)$  che è adiacente a  $z$ . Poiché  $G$  non ha archi contraibili, in particolare  $zv$  non è contraibile. Per il Claim 2, esiste un vertice distinto da  $z$  e  $v$ , diciamo  $u$ , tale che  $S' = \{z, v, u\}$  è un separatore di  $G$ . Si noti che per costruzione  $z, v \notin H$ . Poiché  $H$  è 2-connesso (Claim 4), ed  $x, y$  hanno almeno un adiacente in  $F$  (Claim 2),  $H \setminus \{u\}$  è una componente connessa di  $G \setminus \{z, v\}$  di cardinalità strettamente maggiore di  $F$ , contraddicendo la scelta di  $xy$ . □

Per definizione, partendo da un grafo 3–connesso  $G$  ed eliminando un arco contraiabile, ottengo un grafo che è ancora 3–connesso. Per il teorema appena dimostrato, l'operazione può essere ripetuta finché  $G$  ha almeno 5 vertici. Si noti che lo scheletro del grafo ottenuto tramite al termine di tali operazioni è  $K_4$ , poiché ogni grafo con 4 vertici con scheletro diverso da  $K_4$  non è 3–connesso.

L'operazione inversa alla contrazione di un arco è la *decontrazione* di un vertice. Dato un grafo  $G(V, E)$  ed un vertice  $v \in V$ , il grafo  $G'(V', E')$  ottenuto decontraendo  $v$  è il grafo con  $V' = V \cup \{u, u'\}$ , e l'insieme degli archi  $E'$  è dato da  $E_0 \cup E_u \cup E_{u'} \cup \{uu'\}$ , dove  $E_0$  è il sottoinsieme di archi di  $E$  che non incidono su  $v$ ,  $F$  è un sottoinsieme di  $\delta(v)$ ,  $E_u = \{ut : vt \in F\}$ ,  $E_{u'} = \{u't : vt \in \delta(v) \setminus F\}$ . Rimarchiamo che per avere una decontrazione ben definita, è necessario specificare il vertice  $v$  e l'insieme  $F \subseteq \delta(v)$ , mentre nella contrazione è sufficiente specificare l'arco. Dal Teorema 6.4.1, segue immediatamente il prossimo corollario.

**Corollario 6.4.2.** *Ogni grafo 3–connesso è ottenibile da  $K_4$  decontraendo vertici e aggiungendo archi paralleli.*

Il seguente teorema, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio, illustra invece delle condizioni necessarie e sufficienti affinché la decontrazione di un vertice preservi la 3–connessione.

**Teorema 6.4.3.** *Sia  $G$  un grafo 3–connesso e  $v$  un vertice di  $G$ . Allora il grafo ottenuto decontraendo  $v$  è 3–connesso se e solo se  $v$  ha almeno 3 vicini,  $d(v) \geq 4$  e  $u, u'$  hanno almeno due vicini distinti in  $G'$ .*

## 6.5 Splitting-off e applicazioni

### 6.5.1 Splitting-off

In questa sezione mostriamo una importante operazione su grafi. Sia  $G(V \cup \{z\}, E)$  un grafo e  $zt, zv$  suoi archi. La sostituzione di  $zt, zv$  con un arco  $tv$  è detta *splitting-off*, mentre il grafo  $G'(V \cup \{z\}, (E \setminus \{zt, zv\}) \cup \{tv\})$  è detto *ottenuto da  $G$  tramite splitting-off su  $zt, zv$* . Sia ora  $k \geq 2$  intero, e supponiamo ora che il grafo  $G$  soddisfi la seguente proprietà:

$$k_{xy}^E \geq k, \text{ per ogni } x, y \in V. \quad (6.1)$$

Se il grafo  $G'$  soddisfa ancora (6.1), allora la coppia  $zt, zv$  è detta *splittable*. La vasta applicabilità dell'operazione di splitting-off è certificata dal Lemma 6.5.2, congetturato da Lovász e dimostrato da Mader. Iniziamo con un risultato preliminare, lasciato come esercizio.

**Lemma 6.5.1.** *In un grafo  $G = (V, E)$ , dati tre sottoinsiemi qualsiasi  $X, Y, Z$  di  $V$ , vale:*

$$\begin{aligned} d_G(X) + d_G(Y) + d_G(Z) \geq & d_G(X \setminus (Y \cup Z)) + d_G(Y \setminus (X \cup Z)) + d_G(Z \setminus (X \cup Y)) \\ & + d_G(X \cap Y \cap Z) + 2d_G(X \cap Y \cap Z, V \setminus (X \cup Y \cup Z)). \end{aligned}$$

**Lemma 6.5.2.** [Splitting-off Lemma]

*Sia  $k \geq 2$  un intero,  $G(V \cup \{z\}, E)$  un grafo con  $d(z) > 0$  pari che soddisfa (6.1). Allora, per ogni  $zt \in E$ , esiste  $zv \in E$  tale che  $zt, zv$  è una coppia splittable.*

*Dimostrazione.* È immediato osservare quanto segue.

**Claim 1:** Un grafo  $G(V \cup \{z\}, E)$  soddisfa (6.1) se e solo se, per ogni  $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$ , vale  $d_G(X) \geq k$ .

Un insieme  $\emptyset \neq X \subset V$  è *pericoloso* se  $d_G \leq k + 1$ . L'introduzione di questi insiemi è giustificata dal seguente claim.

**Claim 2:**  $zu, zv$  è splittable in un grafo  $G(V \cup \{z\}, E)$  se e solo se non esiste un insieme pericoloso che contiene entrambi  $u$  e  $v$ .

*Dimostrazione.* Si noti che facendo un splitting-off su  $zt, zv$ , il valore di un taglio  $\delta(X)$  con  $\emptyset \neq X \subset V$  resta invariato se  $|\{t, v\} \cap X| \leq 1$ , mentre diminuisce esattamente di 2 se  $t, v \in X$ . Sia  $G'$  il grafo ottenuto da  $G$  facendo splitting-off su  $tz, vz$ . Supponiamo ora che un insieme pericoloso  $X$  contenga entrambi  $u, v$ . Allora  $d_{G'}(X) = d_G(X) - 2 \leq k + 1 - 2 \leq k - 1$ , quindi, per il Claim 1,  $zu, zv$  non è splittable. Se invece nessun insieme pericoloso contiene entrambi  $u, v$ , allora per ogni insieme pericoloso  $X$  vale  $d_{G'}(X) = d_G(X) \geq k$  e per ogni insieme non pericoloso  $X$  vale  $d_{G'}(X) \geq d_G(X) - 2 \geq k + 2 - 2 \geq k$ . Dal Claim 1, segue che  $zu, zv$  è splittable.  $\square$

**Claim 3:** Se  $X$  è pericoloso, allora  $d_G(z, X) \leq \frac{d_G(z)}{2}$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è pericoloso, abbiamo  $k+1 \geq d_G(X)$ . Vale  $d_G(X) = d_G(V \setminus X) - d_G(z, V \setminus X) + d_G(z, X) = d_G(V \setminus X) - d_G(z) + 2d_G(z, X)$ . Poiché  $d_G(V \setminus X) \geq k$ , otteniamo  $1 \geq 2d_G(z, X) - d_G(z)$ , quindi vale  $\frac{d_G(z)+1}{2} \geq d_G(z, X)$ . Dalla parità di  $d_G(z)$  e dal fatto che  $d_G(z, X)$  è intero, possiamo arrotondare per difetto, e otteniamo il risultato desiderato.  $\square$

Dimostriamo il lemma per assurdo: supponiamo che  $zt \in E$  non appartenga a nessuna coppia splittabile. Allora il Claim 2 ci dice che, per ogni  $v \in N(z)$ , esiste un insieme pericoloso che contiene  $t$  e  $v$ . Quindi esiste una famiglia  $\mathcal{F}$  di insiemi pericolosi tali che  $t \in F$  per ogni  $F \in \mathcal{F}$  e  $\cup_{F \in \mathcal{F}} F \supset N(z)$ . Prendiamo una tale famiglia che minimizza  $|\mathcal{F}|$ .

**Claim 4:**  $|\mathcal{F}| \geq 3$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{F}$  contenesse un solo insieme  $X$ , allora avremmo  $d_G(z) = d_G(z, X)$ , contraddicendo il Claim 3. Dunque  $|\mathcal{F}| \geq 2$ . Se  $\mathcal{F} = \{X, Y\}$ , poiché  $t \in X \cap Y$ , allora  $d_G(z, Y - X) < d_G(z, Y)$ . Ricordando che  $X \cup Y$  copre  $N(z)$ , otteniamo  $d_G(z) \leq d_G(z, X) + d_G(z, Y - X) < d_G(z, X) + d_G(z, Y) \leq \frac{d_G(z)}{2} + \frac{d_G(z)}{2} = d_G(z)$  (dove l'ultima diseuguaglianza segue dal Claim 3), una contraddizione. Dunque  $|\mathcal{F}| \geq 3$ .  $\square$

Applicando il Claim precedente, siano  $X, Y, Z$  insiemi distinti di  $\mathcal{F}$ . La minimalità di  $|\mathcal{F}|$  ci dice che  $X \setminus (Y \cup Z)$ ,  $Y \setminus (X \cup Z)$ , e  $Z \setminus (X \cup Y)$  non sono vuoti. Applicando il Lemma 6.5.1, agli insiemi  $X, Y, Z$  nel grafo  $G = (V + z, E)$  ci da:

$$\begin{aligned} 3(k+1) &\geq d_G(X) + d_G(Y) + d_G(Z) \\ &\geq d(X \setminus (Y \cup Z)) + d(Y \setminus (X \cup Z)) + d(Z \setminus (X \cup Y)) \\ &\quad + d(X \cap Y \cap Z) + 2d(X \cap Y \cap Z, V \setminus (X \cup Y \cup Z)) \\ &\geq 4k + 2, \end{aligned}$$

dove l'ultima diseuguaglianza segue dal fatto che  $d_G(W) \geq k$  per ogni  $W \subseteq V$  (cfr. Claim 1) e dal fatto che  $t \in X \cap Y \cap Z$ , dunque  $X \cap Y \cap Z$  non è vuoto e  $d(X \cap Y \cap Z, (V \setminus (X \cup Y \cup Z)) \cup \{z\}) \geq 1$ . Questo contraddice  $k \geq 2$  e dimostra il lemma.  $\square$

Sottolineiamo che tutte le ipotesi sono necessarie. Ad esempio, il lemma non è vero per  $k = 1$ : il grafo connesso  $K_{1,4}$  è disconnesso da un qualsiasi splitting-off. Inoltre, il grado di  $z$  deve essere pari: il grafo  $K_4$  con vertici  $v_1, \dots, v_4$  è 3-arcoconnesso ed uno splitting-off su  $v_1v_2, v_1v_3$  fa diminuire l'arcoconnettività tra  $v_3$  e  $v_4$  di uno. Si noti infine che, applicando  $\frac{d_G(z)}{2}$  volte il Lemma di Lovász, esiste un splitting-off *totale* degli archi incidenti a  $z$ , cioè si ottiene un grafo con  $k(x, y) \geq k$ , per ogni  $x, y \in V$  e  $d(z) = 0$ .

### 6.5.2 Weak orientation theorem

In questa sezione mostriamo come applicare lo Splitting-off Lemma al fine di dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema 6.2.8.

**Teorema 6.5.3.** [Nash-Williams]

*Sia  $k \geq 1$  un intero. Un grafo  $G = (V, E)$  ammette un orientamento  $D = (V, A)$  tale che  $k^A(D) \geq k$  se e solo se  $k^E(G) \geq 2k$ .*

*Dimostrazione.* La condizione è chiaramente necessaria. Supponiamo per assurdo che la relazione opposta sia falsa e sia  $G = (V, E)$  un controesempio con  $|V| + |E|$  minimo.

**Claim 1:**  $G$  è criticamente  $2k$ -arcoconnesso, cioè  $k^E(G) = 2k$  e  $k^E(G \setminus e) \leq 2k - 1$ , per ogni  $e \in E$ .

*Dimostrazione.* Se non lo fosse, allora esisterebbe  $e \in E$  tale che  $G \setminus e$  è  $2k$ -arcoconnesso. La minimalità di  $|V| + |E|$  implica che  $G \setminus e$  non è più un controesempio, dunque ammette un orientamento  $D = (V, A)$  tale che  $k^A(D) \geq k$ . Quest'orientamento si estende a  $G$  orientando arbitrariamente l'arco  $e$ , una contraddizione col fatto che  $G$  sia un controesempio.  $\square$

**Claim 2:** Esiste  $v \in V$  tale che  $d_G(v) = 2k$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi,  $\min_{S \subseteq V} \delta(S) = 2k$ . Sia  $\delta(S)$  un taglio di cardinalità  $2k$  con  $|S|$  minimale. Per provare il Claim è sufficiente dimostrare che  $|S| = 1$ . Supponiamo per assurdo  $|S| > 1$ , allora esiste almeno un arco tra due vertici di  $S$ , diciamo  $uv$ . Poiché il grafo è criticamente  $2k$ -arcoconnesso,  $uv$  appartiene ad un taglio di grado  $2k$ , dunque  $k_{uv}^E(G) = 2k$ . Il Lemma 2.5.3 applicato alla coppia  $u, v$  ci dà l'esistenza di un taglio minimo  $\delta(X)$  che separa  $u$  da  $v$ , con  $X \subset S$ . Ma allora  $d_G(X) = 2k$  contraddicendo la minimalità di  $|S|$ .  $\square$

Il Claim 2 ci assicura l'esistenza di un vertice  $z \in V$  con  $d_G(z) = 2k$ . Sia  $G'$  il grafo ottenuto da  $G$  tramite lo splitting-off totale degli archi incidenti a  $z$  e poi eliminando  $z$ . Dallo Splitting-off Lemma e dalle osservazioni successive, sappiamo che  $G'$  è  $2k$ -arcoconnesso. Dalla minimalità del controesempio  $G$ , abbiamo che  $G'$  non è un controesempio, dunque ammette un orientamento  $D' = (V_{\setminus z}, A')$  tale che  $k^{A'}(D') \geq k$ . Sia  $F$  l'insieme degli archi di  $A'$  ottenuti dallo splitting-off. Si noti che il grafo orientato ottenuto aggiungendo un vertice  $z$  a  $D'$  a rimpiazzando ogni arco  $(x, y) \in F$  con gli archi  $(x, z), (z, y)$  è un orientamento  $D = (V, A)$  di  $G$ . Per ottenere la contraddizione cercata, è sufficiente il seguente claim, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Claim 3:** Dimostrare che  $k^A(D) \geq k$ .

□

### 6.5.3 Aumento dell'arcoconnettività

In questa sezione studiamo il seguente problema: dato un grafo  $G$  e una certa connettività  $k$ , quale è il numero minimo di archi da aggiungere a  $G$  per renderlo  $k$ -arcoconnesso? Iniziamo con l'introdurre una disuguaglianza valida, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Lemma 6.5.4.** *Per ogni grafo  $G(V, E)$  e per ogni coppia di sottoinsiemi  $X, Y$  di  $V$ , vale*

$$d(X) + d(Y) = d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X) + 2d(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y)).$$

Siano  $k \geq 2$  un intero e  $G$  un grafo tale che  $k^E(G) = k$ . Un insieme  $X$  tale che  $d(X) = k$  si chiama *stretto*.

**Osservazione 6.5.5.** *Se  $X$  e  $Y$  sono stretti e  $X \setminus Y$  e  $Y \setminus X$  sono entrambi non vuoti, allora  $X \setminus Y$  e  $Y \setminus X$  sono stretti e  $d_G(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y)) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Applicando l'esercizio precedente ed il fatto che  $k^E(G) = k$ , abbiamo  $k + k = d_G(X) + d_G(Y) = d_G(X \setminus Y) + d_G(Y \setminus X) + 2d_G(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$ . Poiché  $X \setminus Y$  e  $Y \setminus X$  sono entrambi non vuoti,  $d_G(X \setminus Y) \geq k$  e  $d_G(Y \setminus X) \geq k$ . Quindi  $d_G(X \setminus Y) = d_G(Y \setminus X) = k$  e  $d_G(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y)) = 0$ . □

Il seguente teorema ci dice esattamente quale è il numero di archi da aggiungere per rendere un grafo  $k$ -arcoconnesso. Si ricordi che una *sottopartizione*  $X_1, \dots, X_\ell$  di  $V$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $V$  disgiunti a coppie.

**Teorema 6.5.6.** [Watanabe, Nakamura]

Sia  $G = (V, E)$  un grafo e  $k \geq 2$  un intero. Il numero minimo di archi da aggiungere per rendere  $G$   $k$ -arcoconnesso è

$$\lceil \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{X \in \mathcal{X}} (k - d_G(X)) : \mathcal{X} \text{ è una sottopartizione di } V \right\} \rceil.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha(k, G)$  il numero di archi da aggiungere per rendere  $G$   $k$ -arcoconnesso, e  $\gamma = \max \{ \sum_{X \in \mathcal{X}} (k - d_G(X)) : \mathcal{X} \text{ è una sottopartizione di } V \}$ .

Anzitutto, mostriamo che  $\alpha(k, G) \geq \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ . Per rendere  $G$   $k$ -arcoconnesso, il grado di ogni sottoinsieme non vuoto di vertici deve essere almeno  $k$ , dunque dobbiamo aggiungere almeno  $k - d_G(X)$  archi a  $\delta(X)$ . Chiamiamo *deficienza* di  $X$  il valore  $k - d_G(X)$ . È sufficiente dimostrare la tesi per sottopartizioni di  $V$  con in cui tutti i sottoinsiemi  $X_1, \dots, X_\ell$  hanno deficienze nonnegative. Sia  $\{X_1, \dots, X_\ell\}$  una tale sottopartizione di  $V$ . Aggiungere un arco a  $G$  può contribuire a diminuire la somma delle deficienze degli insiemi della sottopartizione di al massimo due: ciò succede quando questo arco connette due di questi insiemi. Dunque otteniamo che  $2\alpha(k, G) \geq \sum_{i=1}^{\ell} (k - d_G(X_i))$ . Poiché vale per ogni sottopartizione di  $V$  con deficienze nonnegative, possiamo prendere il massimo e ottenere  $2\alpha(k, G) \geq \gamma$ . Dividendo per due e arrotondando per eccesso, otteniamo  $\alpha(k, G) \geq \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ .

Mostriamo adesso che  $\alpha(k, G) \leq \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ . Aggiungiamo a  $G$  un vertice  $z$  ed il minimo numero di archi fra  $z$  e  $V$  tale che il grafo  $H = (V \cup \{z\}, E')$  così ottenuto soddisfa  $k_{xy}^{E'} \geq k$  per ogni  $x, y \in V$ . Questo è equivalente a dire che  $d_H(X) \geq k$ , per ogni  $\emptyset \neq X \subset V$ .

**Claim 1:**  $d_H(z) \geq \gamma$ .

*Dimostrazione.* Per ogni sottopartizione  $\{X_1, \dots, X_\ell\}$  di  $V$ , vale  $d_H(z) \geq \sum_{i=1}^{\ell} d_H(z, X_i) \geq \sum_{i=1}^{\ell} (k - d_G(X_i))$ . Possiamo dunque scegliere la sottopartizione che realizzi  $\gamma$  ed ottenere  $d_H(z) \geq \gamma$ .  $\square$

Si noti che per ogni arco  $zu$  esiste un insieme stretto  $X$  che contiene  $u$ : altrimenti, potremmo eliminare l'arco  $zu$  senza violare  $k_{xy}(G) \geq k$ , per ogni  $x, y \in V$ , contraddicendo il fatto che avevamo aggiunto un numero minimo di archi fra  $z$  e  $V$ . Quindi esiste una famiglia  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_\ell\}$  di insiemi stretti tale che  $N(z) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i$ . Scegliamo  $\mathcal{X}$  in modo da minimizzare  $\sum_{i=1}^{\ell} |X_i|$ .

**Claim 2:**  $\mathcal{X}$  è una sottopartizione di  $V$ .

*Dimostrazione.* Se per assurdo  $\mathcal{X}$  non fosse una sottopartizione di  $V$ , esisterebbero  $i \neq j$  tale che  $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ . Poiché abbiamo scelto  $\mathcal{X}$  con  $\sum_{i=1}^{\ell} |X_i|$  minimo, i membri di  $\mathcal{X}$  non sono contenuti uno nell'altro, quindi  $X_i \setminus X_j$  e  $X_j \setminus X_i$  sono non vuoti. Applicando l'Osservazione 6.5.5 a  $X_i$  e  $X_j$ , otteniamo che  $X_i \setminus X_j$  e  $X_j \setminus X_i$  sono entrambi stretti e non ci sono archi fra  $(V \cup \{z\}) \setminus (X_i \cup X_j)$  e  $X_i \cap X_j$ . Dunque sostituendo  $X_i$  e  $X_j$  in  $\mathcal{X}$  con  $X_i \setminus X_j$  e  $X_j \setminus X_i$ , troviamo un'altra famiglia di insiemi stretti che copre  $N(z)$ . Poiché  $|X_i \setminus X_j| + |X_j \setminus X_i| = |X_i| + |X_j| - |X_i \cap X_j| < |X_i| + |X_j|$ , la nuova famiglia contraddice la scelta di minimalità di  $\sum_{i=1}^{\ell} |X_i|$ , dimostrando il claim.  $\square$

**Claim 3:**  $d_H(z) = \gamma$ .

*Dimostrazione.* Per il Claim 1, dobbiamo solo mostrare  $d_H(z) \leq \gamma$ . Per il Claim 2, vale  $d_H(z) = \sum_{i=1}^{\ell} d(z, X_i) = \sum_{i=1}^{\ell} (k - d_G(X_i))$ , dunque  $d_H(z) \leq \gamma$ .  $\square$

Sia  $H'$  il grafo isomorfo ad  $H$  se  $d_H(z)$  è pari, ottenuto aggiungendo un arco arbitrario fra  $z$  e  $V$  altrimenti. Il grado di  $z$  in  $H'$  è quindi per il Claim 3 pari a  $2\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ . Adesso, possiamo applicare lo Splitting-off Lemma e fare un splitting-off totale degli archi incidenti a  $z$ , mantenendo la proprietà che  $k_{xy} \geq k$  per ogni  $x, y \in V$ . Il grafo  $G'$  così ottenuto ha il vertice  $z$  isolato: possiamo quindi rimuoverlo. Il grafo ottenuto è  $G''(V, E \cup F)$ , dove  $F$  è l'insieme degli archi ottenuti dallo splitting-off totale. Poiché  $|F| = \frac{d_H(z)}{2} = \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ , ne segue  $\alpha(k, G) \leq \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$  e quindi la tesi.  $\square$

## Esercizi

**Esercizio 6.1** Si dimostri il Lemma 6.2.2.

**Esercizio 6.2** Si dimostri il Lemma 6.2.3.

**Esercizio 6.3** Si dimostri il Fan Lemma (Lemma 6.3.4).

**Esercizio 6.4** Si dimostri il Lemma 6.3.5.

**Esercizio 6.5** Si dimostri il Teorema 6.4.3.

**Esercizio 6.6** Si dimostri il Lemma 6.5.1.

**Esercizio 6.7** Si provi che nel Claim 2 del Teorema 6.5.3 ci sono in realtà almeno due vertici di grado  $2k$ .

**Esercizio 6.8** Si dimostri il Claim 3 del Teorema 6.5.3.

**Esercizio 6.9** Si dimostri il Lemma 6.5.4.

**Esercizio 6.10** Dato un grafo semplice  $G = (V, E)$ , dimostrare  $k(G) \leq k^E(G) \leq d_{\min}$ . Dare un esempio in cui entrambe le 2 disuguaglianze siano strette.

**Esercizio 6.11** Dato un grafo  $G = (V, E)$  2-connesso e nodi distinti  $s_1, s_2, t_1, t_2$ ,  $G$  contiene sempre due cammini disgiunti fra  $s_1$  e  $t_1$  e fra  $s_2$  e  $t_2$ ?

**Esercizio 6.12** Si provi che un grafo minimalmente  $k$ -arcoconnesso ha al più  $k(n - k)$  archi. Si forniscano esempi che mostrino che questo bound non è migliorabile. (*Suggerimento: si consideri prima il caso con  $k$  pari.*)

**Esercizio 6.13** Sia  $k$  un intero pari. L'operazione inversa ad uno splitting-off completo in un vertice  $z$  di grado  $2p$  è la seguente: si selezionino  $t$  archi esistenti, si suddivida ciascuno di questi e si identifichino i vertici così ottenuti con un nuovo vertice  $z$ . Ci riferiremo a questa operazione come al *pinching di  $t$  archi (con un vertice  $z$ )*.

- Si mostri che il grafo ottenuto facendo un pinching di  $t \geq k$  archi in un grafo  $k$ -arcoconnesso è arcoconnesso.
- Si mostri che ogni grafo  $k$ -arcoconnesso  $G(V, E)$  può essere costruito da un grafo con due vertici e  $k$  archi paralleli attraverso le seguenti due operazioni:
  - (i) aggiunta di archi,
  - (ii) pinching di  $\frac{k}{2}$  archi.



# Capitolo 7

## Matching

### 7.1 Definizioni, condizioni di ottimalità di un matching

Dato un grafo  $G(V, E)$ ,  $M \subseteq E$  è un *matching* se ogni vertice di  $V$  è estremità di al più un arco di  $M$ . Un vertice  $v \in V$  si dice  *$M$ -esposto* se nessun arco di  $M$  incide su  $v$ ;  *$M$ -saturato* se esattamente un arco di  $M$  incide su  $v$ . Se il matching  $M$  è chiaro dal contesto, useremo i termini *esposto* e *saturato*.

Un matching  $M$  di  $G$  è *massimale* se non esiste nessun matching di  $G$  che contiene propriamente  $M$ ; è *massimo* se non esiste nessun matching di  $G$  che ha cardinalità strettamente maggiore di  $M$ . Un matching  $M$  è *perfetto* se satura tutti i vertici del grafo. Si noti che un matching perfetto ha cardinalità  $\frac{n}{2}$ . Ovviamente nessun grafo con  $n$  dispari ammette un matching perfetto: è anche facile costruire esempi di grafi con  $n$  pari che non hanno matching perfetti. Inoltre ogni matching perfetto è massimo, ogni matching massimo è massimale, ma nessuna di queste relazioni vale nella direzione opposta. Il *matching number*  $\nu(G)$  di un grafo  $G$  è la cardinalità di un massimo matching di  $G$ .

Studiamo il valore  $\nu(G)$  per alcune classi di grafi. Banalmente, un grafo 1-regolare  $G$  ha sempre un (unico) matching perfetto, dato da tutti gli archi di  $G$ . E' semplice dimostrare il seguente lemma.

**Esercizio 7.1.** *Un grafo è 2-regolare se e solo se ogni sua componente è un ciclo.*

Dall' Esercizio 7.1 e dalla semplice osservazione che un ciclo ha un matching perfetto se e solo se la sua lunghezza è pari, si osserva immediatamente che un grafo 2-regolare ha un matching perfetto se e solo se ogni sua componente ha un numero pari di vertici.

### 7.1.1 Cammini aumentanti

Dato un grafo  $G$  ed un suo matching  $M$ , un cammino  $v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$  su  $G$  si dice  $M$ -alternante se, per  $1 \leq i \leq k-2$ ,  $e_i$  appartiene al matching se e solo se  $e_{i+1}$  non appartiene al matching (cioè i suoi archi appartengono alternativamente ad  $M$  ed a  $E \setminus M$ ). Un cammino  $M$ -alternante si dice  $M$ -aumentante se le sue estremità sono esposte. Si noti che questo implica che  $e_1, e_{k-1} \notin M$ . In particolare, un cammino  $M$ -aumentante ha lunghezza  $\ell$  dispari, contiene  $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil$  archi non del matching e  $\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$  archi del matching.

Dati due insiemi  $M_1, M_2$ , la *differenza simmetrica* di  $M_1$  ed  $M_2$ , indicata con  $M_1 \Delta M_2$ , è l'insieme  $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ .

**Lemma 7.1.1.** *Siano  $M$  un matching su un grafo  $G(V, E)$ , e  $P$  un cammino  $M$ -aumentante. Allora  $M' = M \Delta P$  è un matching di  $G$  con cardinalità  $|M| + 1$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $P$  è  $M$ -aumentante, vale  $|P \setminus M| = |P \cap M| + 1$ . Quindi

$$|M \Delta P| = |(M \setminus P) \cup (P \setminus M)| = |(M \setminus P)| + |(P \setminus M)| = |(M \setminus P)| + |P \cap M| + 1 = |M| + 1$$

Osserviamo ora che  $M'$  è un matching, i.e. che su ogni vertice di  $G$  incide al più un arco di  $M'$ . Fissato un vertice  $v \notin P$ , un arco  $e \in M'$  incide su  $v$  se e solo se  $e \in M$ : poiché  $M$  è un matching, su  $v \notin P$  incide al più un arco di  $M'$ . Per ogni vertice interno di  $P$ , vale  $|\delta(v) \cap M'| = |\delta(v) \cap M| = 1$ . Infine per ogni estremità  $v$  di  $P$ , vale  $|\delta(v) \cap M'| = |\delta(v) \cap M| + 1 = 1$ , dove  $|\delta(v) \cap M| = 0$  segue dal fatto che le estremità di un cammino aumentante sono vertici  $M$ -esposti.

□

Dal Lemma 7.1.1, segue che un matching che ammette un cammino  $M$ -aumentante non è massimo. Come dimostrato nel seguente teorema, vale anche l'implicazione opposta.

**Teorema 7.1.2.** *Un matching  $M$  di  $G$  è massimo se e solo se non esiste un cammino  $M$ -aumentante su  $G$ .*

*Dimostrazione.* Poiché una direzione è implicata dal Lemma 7.1.1, è sufficiente dimostrare che se un matching  $M$  non è massimo, allora esiste sempre un cammino  $M$ -aumentante. Sia  $M$  un matching non massimo di  $G(V, E)$ , ed  $M'$  un matching di  $G$  con  $|M'| > |M|$ . Si noti che questo implica  $|M' \setminus M| > |M \setminus M'|$ . Studiamo ora il grafo  $G'(V, M \Delta M')$ . Si noti che ogni vertice di  $G'$  ha grado compreso tra 0 e 2. In particolare, ha grado 0 se è saturato sia da  $M$  che da  $M'$  con stesso arco, o da nessuno di questi; 1 se è saturato da  $M$  ma non da  $M'$ , o viceversa; 2 se è saturato da  $M$  ed  $M'$ , ma con archi diversi. E' semplice dimostrare il seguente claim.

**Claim 1:** Un grafo ha tutti i vertici di grado 0, 1 o 2 se e solo se ogni sua componente connessa è un cammino o un ciclo.

Studiamo ora le componenti connesse di  $G'$ .

**Claim 2:** Sia  $\mathcal{C}$  una componente connessa di  $G'$  che corrisponde ad un ciclo  $C$ . Allora  $|M \cap C| = |M \cap C'|$ .

*Dimostrazione.* Poiché ogni vertice  $v$  di un ciclo ha grado 2, per quanto osservato esattamente un arco di  $G'$  incidente su  $v$  appartiene ad  $M$ , ed esattamente uno appartiene ad  $M'$ . Quindi, gli archi del ciclo appartengono alternativamente ad  $M$  ed  $M'$ . Tale ciclo ha dunque lunghezza pari, poiché altrimenti su un qualche vertice di  $C$  inciderebbero due archi dello stesso matching. Ne segue  $|M \cap C| = |M \cap C'|$ .  $\square$

**Claim 3:** Sia  $\mathcal{C}$  una componente connessa di  $G'$  che corrisponde ad un cammino  $P$ . Allora  $||M' \cap P| - |M \cap P|| \leq 1$ . In particolare, se  $|M' \cap P| = |M \cap P| - 1$ , allora  $P$  è un cammino  $M$ -aumentante su  $G$ .

*Dimostrazione.* Poiché ogni vertice interno di un cammino ha grado 2, per quanto osservato su tali vertici gli archi del cammino appartengono alternativamente ad  $M$  ed a  $M'$ . Quindi  $||M' \cap P| - |M \cap P|| \leq 1$ . In particolare, se  $|M' \cap P| = |M \cap P| + 1$ , allora il primo e l'ultimo arco del cammino appartengono ad  $M' \setminus M$ . Quindi le estremità sono  $M$ -esposte e di conseguenza  $P$  è un cammino  $M$ -aumentante su  $G$ .  $\square$

Poiché  $|M' \setminus M| > |M \setminus M'|$ , esiste almeno una componente di  $G'$  che ha più archi di  $M'$  che archi di  $M$ . Per i Claim 1, 2 e 3, tale componente sarà un cammino  $M$ -aumentante per in  $G$ .  $\square$

Il Teorema 7.1.2 ci fornisce immediatamente uno schema di algoritmo per il calcolo di un matching massimo in un grafo.

ALGORITMO PER IL CALCOLO DEL MASSIMO MATCHING IN UN GRAFO

*Input:* Un grafo  $G = (V, E)$ . *Output:* Un matching di cardinalità massima in  $G$ .

1. **Inizializzazione:**  $M = \emptyset$ .
2. **Ricorsione:** finchè esiste un cammino  $M$ -aumentante  $P$  su  $G$ , poni  $M = M \Delta P$ .

Ovviamente non è a priori chiaro come, dato un grafo  $G$  ed un matching  $M$  su  $G$ , calcolare un cammino  $M$ -aumentante. Nella Sezione 7.2 vedremo una procedura polinomiale per il calcolo di un tale cammino su grafi bipartiti. È possibile estendere questa procedura a grafi qualsiasi, ma tale generalizzazione è più complessa e non sarà trattata nelle presenti note.

## 7.2 Grafi bipartiti

In questa sezione focalizziamo lo studio del matching su grafi bipartiti. Iniziamo con delle condizioni necessarie e sufficienti affinché un grafo bipartito abbia un matching perfetto.

**Teorema 7.2.1.** [Hall]

*Sia  $G(X \cup Y, E)$  un grafo bipartito.  $G$  ha un matching che satura tutti i vertici di  $X$  se e solo se per ogni  $S \subseteq X$ ,  $|S| \leq |N(S)|$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che la condizione  $|S| \leq |N(S)|$  per ogni  $S \subseteq X$  è necessaria. Si prenda un insieme  $S \subseteq X$ . Se  $|S| > |N(S)|$ , allora ogni matching  $M$  di  $G$  lascerà almeno  $|S| - |N(S)| > 0$  vertici di  $S$   $M$ -esposti; non esiste dunque un matching di  $G$  che satura tutti i vertici di  $X$ .

Dimostriamo ora che tale condizione è anche sufficiente. Supponiamo  $G(X \cup Y, E)$  sia un grafo bipartito e non esista un matching che satura ogni vertice dell'insieme  $X$ . Sia  $M$  un matching massimo di  $G$  e sia  $S$  l'insieme dei vertici di  $X$  raggiungibili da un vertice  $M$ -esposto di  $X$  con un cammino  $M$ -alternante. Si noti che i vertici esposti di  $X$  appartengono ad  $S$ , perché raggiungibili da se stessi tramite un cammino

di lunghezza 0. Sia  $P = v_1, e_1, \dots, v_k$  un cammino  $M$ -alternante, dove  $v_1$  è un vertice  $M$ -esposto di  $X$ . Poiché  $v_1$  è  $M$ -esposto e  $G$  è bipartito, gli archi  $e_i$  con  $i$  dispari sono archi di  $E \setminus M$ , mentre gli archi  $e_i$  con  $i$  pari appartengono ad  $M$ . Analogamente, i vertici  $v_i$  appartengono ad  $X$  se  $i$  è dispari, ad  $Y$  se  $i$  è pari. Poiché  $v_k \in X$ ,  $k$  è dispari, quindi  $e_{k-1} \in M$ .

Dimostriamo ora che  $N(S)$  non contiene un vertice  $M$ -esposto. Supponiamo infatti che un tale vertice esista, diciamo  $y$ , e sia  $x$  il suo adiacente in  $S$ . Allora per quanto detto il cammino  $v_1, e_1, \dots, v_k = x, xy, y$  è un cammino  $M$ -alternante, contraddicendo l'ottimalità del matching  $M$ . Quindi ogni vertice  $y \in N(S)$  è  $M$ -saturato: chiamiamo  $x(y)$  il vertice che è unito ad  $y$  da un arco di  $M$ .

**Claim 1:**  $x(y) \in S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $x'(y)$  il vertice di  $S$  tale che  $yx'(y) \in E$  e sia  $P$  il cammino  $M$ -alternante da un vertice  $M$ -esposto di  $X$  ad  $x'(y)$ . Se  $x'(y)y \in M$ , allora  $x'(y) = x(y)$  e la tesi segue. Altrimenti,  $x'(y)y \notin M$  ed è possibile definire un nuovo cammino  $P' = P, x'(y)y, y, yx(y), x(y)$ . Per costruzione, questo cammino è ancora  $M$ -alternante e di conseguenza  $x(y) \in S$ .  $\square$

Per il claim precedente, vale:

$$|N(S)| = |\{y \in N(S) : y \text{ è } M\text{-saturato}\}| = |\{x \in S : x \text{ è } M\text{-saturato}\}| < |S|,$$

dove l'ultima disequaglianza segue dal fatto che  $S$  contiene almeno un vertice  $M$ -esposto. L'insieme  $S \subseteq X$  viola quindi le condizioni del teorema, concludendo la prova.  $\square$

**Corollario 7.2.2.** *Sia  $G(X \cup Y, E)$  un multigrafo bipartito.  $G$  ha un matching perfetto se e solo se  $|X| = |Y|$  e per ogni  $S \subseteq X$ ,  $|S| \leq |N(S)|$ .*

**Lemma 7.2.3.** *Per ogni  $k \geq 1$ , un multigrafo bipartito  $k$ -regolare ha un matching perfetto.*

*Dimostrazione. (Prima versione)*

Sia  $G(X \cup Y, E)$  un multigrafo bipartito  $k$ -regolare. (Quindi  $G$  può contenere archi paralleli ma non cappi). Per ipotesi, su ogni insieme  $S \subseteq X$  incidono  $k|S|$  archi. Similmente, sul suo intorno  $N(S) \subseteq Y$  ne incidono  $k|N(S)|$ . Per definizione, ogni arco che ha una estremità in  $S$  ha l'altra in  $N(S)$ , quindi  $k|S| \leq k|N(S)|$ , da cui

$|S| \leq |N(S)|$ . Sia ora  $C$  una componente connessa di  $G$ . Poiché  $N(X \cap C) = Y \cap C$  e  $N(Y \cap C) = X \cap C$ , ragionando come sopra otteniamo  $k|X \cap C| = k|Y \cap C|$  e di conseguenza  $|X \cap C| = |Y \cap C|$ . Applicando il Corollario 7.2.2, otteniamo dunque che ogni componente connessa di  $G$  ha un matching perfetto: l'unione di questi è un matching perfetto di  $G$ .  $\square$

*Dimostrazione. (Seconda versione)*

Si prenda un controesempio  $G(V, E)$  al teorema che minimizzi  $n(G) + m(G)$  e si scelgano  $u, v$  adiacenti e sia  $\mu \geq 1$  il numero di archi aventi  $u, v$  come estremità. Si costruisca il grafo  $G'(V', E')$ ,  $V' = V \setminus \{u, v\}$ , partendo da  $G_{\setminus \{u, v\}}$  ed aggiungendo un insieme  $F$  di  $k - \mu$  archi tra  $N(u)$  ed  $N(v)$  in modo che  $G'$  sia  $k$ -regolare. Si noti che tale insieme di archi esiste perché per ipotesi  $|\delta(u)| = |\delta(v)| = k$ . Poiché  $m(G') = m(G) - k$  ed  $n(G') = n(G) - 2$ ,  $G'$  non è un controesempio al teorema e  $G'$  contiene un matching perfetto. Questo implica che  $E'$  può essere partizionato in  $k$  matchings perfetti.

Poiché  $|E' \setminus E| = k - \mu$  e  $\mu \geq 1$ , almeno uno di questi matchings è contenuto in  $E$ . Sia  $M$  tale matching: Quindi  $M$  è un matching di  $G$  che satura tutti i nodo eccetto  $u, v$ . Sia  $e$  un arco di estremità  $u, v$ . Allora  $M \cup \{e\}$  è un matching perfetto di  $G$ , una contraddizione.  $\square$

Dato un grafo bipartito  $G(V_1 \cup V_2, E)$  ed un matching  $M$  su  $G$ , è possibile calcolare un matching di cardinalità massima (e quindi il parametro  $\nu(G)$ ), utilizzando la teoria dei flussi. Si consideri infatti la rete di flusso su un grafo orientato  $D(V', A)$  così definito:  $V' = V \cup \{s, t\}$ ;  $A$  è l'insieme dei seguenti archi: per ogni spigolo  $xy \in E$  con  $x \in V_1$ ,  $(x, y) \in A$ ; per ogni  $x \in V_1$ ,  $(s, x) \in A$ ; per ogni  $y \in V_2$ ,  $(y, t) \in A$ . Le capacità  $c$  sull'arco  $e = (u, v) \in A$  è pari a 1 se  $u = s$  o  $v = t$ , a  $+\infty$  altrimenti. L'esercizio seguente mostra come il calcolo di un flusso massimo in  $D$  permetta di ottenere un matching massimo in  $G$ .

**Esercizio 7.2.**  $f$  è un flusso di capacità massima in  $D$  se e solo se  $M$  è un matching di cardinalità massima in  $G$ , ove, per ogni  $uv \in E$ , si ha  $uv \in M$  se e solo se  $f_{uv} = 1$ . Inoltre,  $|M| = f_{st}$ .

### 7.2.1 Trasversali

Dato un grafo  $G(V, E)$ ,  $T \subseteq V$  è un *trasversale* se ogni arco in  $E$  ha almeno una estremità in  $T$ . La minima cardinalità di un trasversale è denotata da  $\tau(G)$ .

**Lemma 7.2.4.** *Per ogni matching  $M$  e trasversale  $T$  di un grafo  $G$ , si ha  $|M| \leq |T|$ .*

*Dimostrazione.* Ogni trasversale dovrà contenere almeno una estremità di ogni arco del grafo e quindi, in particolare, almeno una estremità di ogni arco del matching. Poiché su ogni vertice di  $G$  incide al più un arco del matching, vale  $|M| \leq |T|$ .  $\square$

**Corollario 7.2.5.**  $\nu(G) \leq \tau(G)$ .

È immediato verificare che esistono grafi con  $\tau(G) < \nu(G)$ . Se ci restringiamo ai grafi bipartiti, vale però l'uguaglianza.

**Teorema 7.2.6.** [König]

*Per un grafo  $G$  bipartito vale  $\nu(G) = \tau(G)$ .*

*Dimostrazione.* Per il Corollario 7.2.5, è sufficiente dimostrare  $\nu(G) \geq \tau(G)$ . Si costruisca la rete di flusso  $D(V', A)$  con capacità  $c$  (come indicato nella Sezione 7.2), e sia  $f$  un flusso di valore massimo su tale rete. Per l'esercizio 7.2, tale valore è finito e pari a  $\nu(G)$ . Per il teorema di Menger, esiste un taglio  $\delta^+(S)$  con capacità pari al valore di  $f$ . Si noti che un tale taglio non contiene nessun arco di capacità infinita, perché altrimenti  $c(\delta^+(S))$  e quindi il valore di  $f$  sarebbero illimitati. Quindi  $S$  è del tipo  $\{s\} \cup S_1 \cup S_2$ , con  $S_1 \subseteq V_1$  ed  $S_2 \supseteq \delta^+(S_1)$ . Vale quindi

$$\delta^+(S) = \{(s, x) \text{ per ogni } x \in V_1 \setminus S\} \cup \{(y, t) \text{ per ogni } y \in V_2 \cap S\}.$$

Si consideri l'insieme  $T = (V_1 \setminus S) \cup (V_2 \cap S)$ . Vale

$$\begin{aligned} |T| &= |(V_1 \setminus S)| + |(V_2 \cap S)| \\ &= |\{(s, x) \text{ per ogni } x \in V_1 \setminus S_1\}| + |\{(y, t) \text{ per ogni } y \in V_2 \cap S\}| \\ &= c(\delta^+(S)) = |f| = \nu(G). \end{aligned}$$

Mostriamo ora che  $T$  è un trasversale in  $G$ . Sia  $xy \in G$ , con  $x \in V_1$ . Se  $x \notin S$  allora lo statement è immediato, quindi sia  $x \in S$ . Allora, per costruzione,  $S \supset N^G(x)$ , quindi  $y \in S$  ed, in particolare,  $y \in V_2 \cap S$ . Vale dunque  $\nu(G) = |T| \geq \tau(G)$ .  $\square$

### 7.3 Grafi nonbipartiti

Mostriamo ora un teorema, dovuto a Tutte, che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo abbia un matching perfetto. Iniziamo con alcune definizioni.

Dato un grafo  $G(V, E)$ , indichiamo con  $o(G)$  il numero di componenti connesse dispari di  $G$ . Un insieme  $S \subseteq V$  è una *barriera* di  $G$  se  $|S| = o(G_{\setminus S})$ .  $G$  si dice *hypomatchable* se, per ogni  $v \in V$ ,  $G_{\setminus \{v\}}$  ha un matching perfetto. Si noti che un grafo hypomatchable ha un numero dispari di vertici.

**Teorema 7.3.1.** [Tutte]

$G(V, E)$  contiene un matching perfetto se e solo se, per ogni  $S \subseteq V$ ,  $|S| \geq o(G_{\setminus S})$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che la condizione è necessaria. Supponiamo che per quale  $S \subseteq V$ , valga  $|S| < o(G_{\setminus S})$ , e sia  $M$  un matching massimo di  $G$ . Il numero di vertici di  $G_{\setminus S}$  non coperti dal matching  $M \cap E(G_{\setminus S})$  è almeno pari al numero di componenti connesse dispari di  $G_{\setminus S}$ , poiché ogni matching in un grafo con un numero dispari di vertici lascia almeno un vertice esposto. In formule,  $|M \cap E(G_{\setminus S})| \leq \frac{|V \setminus S| - o(G_{\setminus S})}{2}$ . Si noti inoltre che  $|M \setminus E(G_{\setminus S})| \leq |S|$ , poiché su ogni vertice di  $S$  incide al più un arco di  $M$ . Quindi

$$|M| = |M \cap E(G_{\setminus S})| + |M \setminus E(G_{\setminus S})| \leq |S| + \frac{|V \setminus S| - o(G_{\setminus S})}{2} = \frac{|V| + |S| - o(G_{\setminus S})}{2} < \frac{|V|}{2},$$

quindi  $M$  non è perfetto.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Dato un insieme  $I$ , indichiamo con  $|I|_2$  la *funzione parità*, che vale 1 se  $|I|$  è dispari, 0 altrimenti. Indichiamo con  $\oplus$  la somma binaria, i.e. dati due numeri  $a, b \in \{0, 1\}$ ,  $a \oplus b$  è pari ad 1 se  $a \neq b$ , a 0 altrimenti. Si noti che per un insieme  $I$  ed una sua bipartizione  $I', I''$ , vale  $|I|_2 = |I'|_2 \oplus |I''|_2$ .

**Claim 1:** Sia  $G(V, E)$  un grafo ed  $S \subseteq V$ . Allora  $|V|_2 = |S|_2 \oplus |o(G_{\setminus S})|_2$ .

*Dimostrazione.*  $|V \setminus S|_2 = |V(\mathcal{O}(G_{\setminus S}))|_2 \oplus |V(\mathcal{E}(G_{\setminus S}))|_2$ , dove  $\mathcal{E}(G_{\setminus S})$  è l'insieme delle componenti pari di  $G_{\setminus S}$ , mentre  $\mathcal{O}(G_{\setminus S})$  è l'insieme delle sue componenti dispari. Si noti che ogni componente dispari di  $G_{\setminus S}$  contribuisce con valore 1 a tale somma, mentre ciascuna delle componenti pari contribuisce con 0. Quindi  $|V \setminus S|_2 = |o(G_{\setminus S})|_2$ , da cui  $|V|_2 = |S|_2 \oplus |V \setminus S|_2 = |S|_2 \oplus |o(G_{\setminus S})|_2$ .  $\square$

**Claim 2:** se  $G(V, E)$  è un grafo con  $|V|$  è pari e  $|S| < o(G_{\setminus S})$  per qualche  $S \subseteq V$ , allora  $|S| \leq o(G_{\setminus S}) - 2$ .

*Dimostrazione.* Se  $|S| = o(G_{\setminus S}) - 1$ , allora  $|S|_2 \oplus |o(G_{\setminus S})|_2 = 1$ , poiché esattamente uno di tali due insiemi è dispari. Utilizzando il Claim 1, si ottiene  $|V|_2 = |S|_2 \oplus |o(G_{\setminus S})|_2 = 1$ , contraddicendo la parità di  $V$ .  $\square$

Si supponga ora per assurdo che il teorema sia falso e sia  $G(V, E)$  un controesempio con un numero minimo di vertici. Poiché per ipotesi  $0 = |\emptyset| \geq o(G_{\setminus \emptyset}) = o(G)$ , se ne deduce che  $G$  non ha componenti connesse dispari, e quindi  $|V|$  è pari. Sia ora  $X$  una barriera di  $G$  massimale rispetto all'inclusione. Il claim precedente implica che  $|X| \geq 1$ .

**Claim 4:**  $G_{\setminus X}$  non ha componenti connesse pari.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $G_{\setminus X}$  abbia una componente pari, e sia  $v$  un vertice di tale componente. Allora, definito  $X' = X \cup \{v\}$ , si ha

$$|X'| = |X| + 1 = o(G_{\setminus X}) + 1 \leq o(G_{\setminus X'}),$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che l'eliminazione di  $v$  da  $G_{\setminus X}$  fa aumentare di almeno 1 il numero di componenti dispari del grafo. Poiché, per ipotesi,  $|X'| \geq o(G_{\setminus X'})$ , vale  $|X'| = o(G_{\setminus X'})$ . Quindi  $X'$  è una barriera che contiene strettamente  $X$ , una contraddizione.  $\square$

Dato un vertice  $v \in V \setminus X$  indichiamo con  $F^v$  la componente connessa di  $G_{\setminus X}$  cui appartiene e con  $G^v(V^v, E^v)$  il grafo ottenuto da  $G(F^v)$  eliminando  $v$ . (Cioè  $G^v(V^v, E^v) = G(F^v)_{\setminus \{v\}}$ ).

**Claim 5:** Per ogni  $v \in V \setminus X$ ,  $G^v$  soddisfa le condizioni del teorema, i.e. per ogni  $S \subseteq V^v$ ,  $|S| \geq o(G^v_{\setminus S})$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista  $v \in V \setminus X$  ed un insieme  $Y \subseteq V^v$  tale che  $|Y| < o(G^v_{\setminus Y})$ . Per il Claim 4,  $|V^v|$  è pari, quindi per il Claim 2 vale  $o(G^v_{\setminus Y}) \geq |Y| + 2 = |Y \cup \{v\}| + 1$ . Sia  $T = X \cup Y \cup \{v\}$  e consideriamo il grafo  $G_{\setminus T}$ . Poiché  $o(G_{\setminus X}) = |X|$  e  $o(G(F^v)_{\setminus (Y \cup \{v\})}) = o(G^v_{\setminus Y}) \geq |Y \cup \{v\}| + 1$ , si ottiene

$$o(G_{\setminus T}) = o(G_{\setminus X}) - 1 + o(G(F^v)_{\setminus (Y \cup \{v\})}) \geq |X| - 1 + |Y \cup \{v\}| + 1 = |X \cup Y \cup \{v\}| = |T|.$$

Per ipotesi, vale  $o(G_{\setminus T}) \leq |T|$ . Questo implica che  $T$  è una barriera di  $G$  che contiene strettamente  $X$ , una contraddizione con la massimalità di  $X$ .  $\square$

**Claim 6:** Ogni componente connessa di  $G_{\setminus X}$  è hypomatchable.

*Dimostrazione.* Sia  $G'$  una componente connessa di  $G_{\setminus X}$  e sia  $v \in V(G')$ . Per il claim precedente,  $G'_{\setminus v}$  verifica le ipotesi del teorema. Poiché  $|V(G')| < |V(G)|$ ,  $G'_{\setminus v}$  non è un controesempio al teorema, quindi  $G'_{\setminus v}$  ammette un matching perfetto.  $\square$

Si consideri ora il grafo bipartito  $H(X \cup X', E_H)$ , dove  $X'$  contiene un vertice  $v_C$  per ogni componente connessa  $C$  di  $G_{\setminus X}$ , mentre  $E_H$  ha un arco tra  $v \in X$  ed  $v_C \in X'$  se e solo se  $v$  è adiacente in  $G$  ad almeno un vertice di  $C$ .

**Claim 7:**  $H$  ha un matching perfetto.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che non lo abbia. Poiché  $X$  è una barriera e  $G_{\setminus X}$  non ha componenti connesse pari per il Claim 4,  $|X| = o(G_{\setminus X}) = |X'|$ . Quindi, per il Corollario 7.2.2, esiste un insieme  $S'' \subseteq X'$  tale che  $|S''| > |N_H(S'')|$ . Questo implica che  $|X''| < o(G_{\setminus X''})$ , dove  $X'' = N_H(S'')$ , contraddicendo le ipotesi del teorema.  $\square$

Si consideri dunque un matching perfetto  $M$  su  $H$  e lo si trasformi in un matching  $M'$  su  $G$  sostituendo, ad ogni arco  $vv_C$  con  $v_C \in X'$ , l'arco  $vv'$ , ove  $v'$  è un vertice di  $C$  che è adiacente a  $v$  in  $G$  (per costruzione ne esiste almeno uno). Si noti che, per ogni componente connessa  $C$  di  $G_{\setminus X}$ , esiste esattamente un vertice  $M'$ -saturato  $w$ . Per il Claim 6,  $V(C \setminus w)$  è hypomatchable: sia  $M_C$  un suo matching perfetto. È immediato verificare che  $M' \cup_{C \in \mathcal{C}} M_C$  è un matching perfetto di  $G$ , dove denotiamo con  $\mathcal{C}$  l'insieme delle componenti connesse di  $G_{\setminus X}$ . Questo contraddice il fatto che  $G$  sia un controesempio al teorema, concludendone la dimostrazione.  $\square$

## 7.4 Edge-coloring

### 7.4.1 Definizioni, teorema di Vizing

Dato un grafo  $G(V, E)$ , una *colorazione ammissibile degli archi di  $G$  con  $k$  colori* è una funzione  $\phi : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tale che  $\phi(e) \neq \phi(e')$  per ogni coppia di archi distinti  $e, e' \in E$  con almeno una estremità in comune. Il valore  $\phi(e)$  è detto *colore* assegnato

all'arco  $e$ . Se esiste una colorazione degli archi di  $G$  con  $k$  colori, allora  $G$  è detto  $k$ -arcocolorabile. Il *numero cromatico sugli archi* (*edge-chromatic number*)  $\chi'(G)$  è il minimo  $k$  per cui  $G$  è  $k$ -arcocolorabile. Si noti che, in una colorazione ammissibile, gli archi con stesso colore formano un matching in  $G$ . Il problema di trovare il numero cromatico sugli archi può quindi essere riformulato come segue: trovare il più piccolo numero  $k$  tale che è possibile partizionare l'insieme degli archi di  $G$  in  $k$  matching.

Poiché per definizione in una colorazione ammissibile archi incidenti su uno stesso vertice hanno colore diverso, segue immediatamente la prossima osservazione.

**Osservazione 7.4.1.** Per ogni grafo  $G(V, E)$ ,  $\chi'(G) \geq d_{\max}(G) = \max_{v \in V} d(v)$ .

Il bound non è chiaramente ottimo in generale (infatti  $\chi'(K_3) = 3 > 2 = d_{\max}(K_3) = 2$ ), ma per grafi semplici è possibile dimostrare che è molto vicino all'ottimo.

**Teorema 7.4.2.** [Vizing]

Per un grafo semplice  $G$ ,  $d_{\max}(G) + 1 \geq \chi'(G) \geq d_{\max}(G)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un controesempio. Si colorino gli archi di  $G$  con  $d_{\max}(G) + 1$  colori, in modo che su ogni vertice incida al più un arco di ogni colore, e che sia minimo il numero di archi lasciati non colorati. Definiamo una tale colorazione *minimale*. Poiché  $G$  è un controesempio, esiste almeno un arco non colorato. Diciamo che un colore  $c$  è *rappresentato* in un vertice  $v$  se esiste un arco di  $\delta(v)$  colorato con  $c$ , *mancante* in  $v$  altrimenti. Si noti che abbiamo utilizzato  $d_{\max}(G) + 1$  colori, quindi in ogni vertice  $v$  esiste almeno un colore mancante. Sia  $vv_0$  un arco non colorato: senza perdita di generalità, assumiamo che il colore 0 sia mancante in  $v$ . Allora 0 non è mancante in  $v_0$ , altrimenti potrei colorare l'arco  $vv_0$  con 0, contraddicendo la minimalità della colorazione. Quindi in  $v_0$  manca un altro colore, diciamo 1. Se 1 fosse mancante in  $v$ , allora  $vv_0$  potrebbe essere colorato con 1, ottenendo di nuovo una contraddizione. Quindi esiste un vertice  $v_1$  adiacente a  $v$  tale che  $vv_1$  è colorato con 1. Si noti che il colore 0 è rappresentato in  $v_1$ : se non lo fosse, sarebbe possibile colorare  $v_1v$  con 0 e  $v_0v$  con 1, contraddicendo la minimalità della colorazione.

**Claim 1:** È possibile assumere senza perdita di generalità che esiste un  $\ell \leq d(v) - 2$  ed una sequenza di vertici  $v_0, \dots, v_{\ell+1}$  adiacenti a  $v$  tali che:

- (i) per  $i = 0, \dots, \ell$ , il colore  $i + 1$  manca nel vertice  $v_i$ ;

- (ii) per  $i = 1, \dots, \ell + 1$ , l'arco  $vv_i$  è colorato con il colore  $i$ ;
- (iii) un colore  $k \leq \ell$  manca nel vertice  $v_{\ell + 1}$ .

*Dimostrazione.* Si scelga  $\ell$  massimo tale che  $v_0, \dots, v_{\ell}$  soddisfino (i) e  $v_0, \dots, v_{\ell+1}$  soddisfino (ii). Per quanto osservato, esiste  $v_0$  che soddisfa (i), e  $v_1$  che soddisfa (i), (ii), quindi tale  $\ell$  esiste ed è almeno 0. Inoltre  $\ell \leq d(v) - 2$ , per definizione. Sia  $k$  il colore mancante in  $v_{\ell+1}$ . Se  $k \geq \ell + 2$  potrei rinominare senza perdita di generalità il colore  $k$  con  $\ell + 2$ , contraddicendo la massimalità di  $\ell$ . Inoltre,  $v_{\ell+1}$  è colorato con  $\ell + 1$  per ipotesi. Quindi  $k \leq \ell$ .  $\square$

**Claim 2:** 0 è rappresentato in  $v_{\ell+1}$ .

*Dimostrazione.* Se per assurdo non lo fosse, sarebbe possibile effettuare una *scalata*, colorando  $vv_{\ell+1}$  con 0,  $vv_{\ell}$  con  $\ell + 1$ ,  $vv_{\ell-1}$  con  $\ell$  e così via, fino a colorare  $vv_0$  con 1, contraddicendo la minimalità della colorazione.  $\square$

In particolare, il claim precedente implica che  $k \neq 0$ . Sia ora  $G_{0,k}$  il sottografo di  $G$  ottenuto eliminando tutti gli archi che non sono colorati con 0 o con  $k$ . Si noti che in  $G_{0,k}$  ogni vertice ha grado al più 2. Ricordando il Claim 1 nel Teorema 7.1.2,  $G_{0,k}$  è un'unione di cammini e cicli. Poiché su ogni arco incide al più un vertice di un dato colore, i cicli ed i cammini saranno *alternanti*, i.e. i loro archi saranno colorati alternativamente con 0 e con  $k$ , e dunque di lunghezza pari. Si noti che  $v_{\ell+1}$  ha grado 1 in tale grafo per il Claim 2, ed è quindi l'estremità di un cammino alternante  $P$  il cui arco incidente su  $v_{\ell+1}$  ha colore 0.

**Claim 3:** La colorazione ottenuta invertendo i colori di  $P$  (cioè colorando con  $k$  gli archi di  $P$  colorati con 0 e viceversa) è ancora ammissibile e minimale.

*Dimostrazione.* Banalmente, la colorazione è minimale. Si noti inoltre che è ammissibile, perchè gli unici archi colorati 0 o  $k$  che incidono sui vertici di  $P$  sono quelli di  $P$  stessi.  $\square$

Distinguiamo tre casi:

*Caso 1:*  $v_k \in P$ . Poiché  $vv_k$  è colorato con  $k$ ,  $v$  è o l'immediato predecessore, o l'immediato successore di  $v_k$  in  $P$ . Se  $v$  fosse l'immediato predecessore, poiché il cammino  $P$

è alternante, dovrebbe esistere un arco colorato con 0 che incide su  $v$ , contraddicendo le ipotesi. Quindi  $v$  è l'immediato successore di  $v_k$  in  $P$ , e per quanto detto  $v$  è un'estremità di  $P$ . Si scambino ora i colori del cammino  $P$ : in particolare, questo assegna all'arco  $vv_k$  il colore 0. Per il Claim 3, la colorazione così ottenuta è ammissibile e minimale. Inoltre, nessun arco di  $\delta(v)$  è colorato con  $k$ . È ora possibile effettuare una scalata, colorando  $vv_{k-1}$  con il colore  $k$ ,  $vv_{k-2}$  con il colore  $k-1$ ,  $\dots$ , fino a colorare  $vv_0$  con il colore 1, aumentando di 1 il numero di archi colorati.

*Caso 2:*  $v_{k-1} \in P$ . Poiché il colore  $k$  è mancante in  $v_{k-1}$ , allora l'arco di  $P$  incidente sul cammino  $v_{k-1}$  ha colore 0. Si scambino ora i colori del cammino  $P$ . La colorazione così ottenuta è ammissibile e minimale, ed è tale che nessun arco incidente su  $v_{k-1}$  è colorato con 0. È quindi possibile iniziare una scalata colorando  $vv_{k-1}$  con 0,  $vv_{k-2}$  con  $k-1$ ,  $\dots$ , fino a colorare  $vv_0$  con 1, colorando di nuovo un arco in più.

*Caso 3:*  $v_k, v_{k-1} \notin P$ . Analogamente al caso 2, si scambino i colori di  $P$  e si effettui una scalata assegnando a  $v_{\ell+1}$  il colore 0, fino ad assegnare a  $vv_0$  il colore 1, estendendo ancora di 1 il numero di archi colorati.

Abbiamo dimostrato che, in ciascuno dei tre casi, perveniamo ad una contraddizione con l'ipotesi che la colorazione iniziale fosse minimale. Questo mostra che  $G$  non è un controesempio e dimostra il teorema.

□

Si noti che la dimostrazione fornisce un implicitamente un algoritmo per estendere una colorazione ammissibile con  $d_{\max} + 1$  colori di  $|E|$  archi del grafo ad una colorazione ammissibile con  $d_{\max} + 1$  colori di  $|E| + 1$  archi del grafo. Iterando, è possibile colorare tutti gli archi del grafo utilizzando al più  $d_{\max} + 1$  colori. Si noti però che potrebbe esistere una colorazione con  $d_{\max}$  colori, ma l'algoritmo implicato dalla dimostrazione potrebbe non trovarla. È in effetti noto in letteratura che il problema di determinare se un grafo semplice è buono è computazionalmente difficile.

Un grafo semplice è detto *buono* se  $\chi'(G) = d_{\max}(G)$ , *cattivo* altrimenti.

## 7.4.2 Grafi $k$ -regolari

**Osservazione 7.4.3.** *Un grafo semplice  $k$ -regolare è buono se e solo se i suoi archi sono partizionabili in  $k$  matching perfetti.*

Il prossimo lemma mostra che i grafi bipartiti  $k$ -regolari sono sempre buoni.

**Lemma 7.4.4.** *Si  $k \in \mathbb{N}$ . In un grafo bipartito  $k$ -regolare  $G$  vale  $\chi'(G) = k$ .*

*Dimostrazione.* Dal Corollario 7.2.3, sappiamo che un grafo bipartito  $k$ -regolare  $G(V, E)$  contiene un matching perfetto  $M_1$ . Rimuovendo da  $G$  gli archi di  $M_1$ , si ottiene un grafo bipartito  $k - 1$  regolare, che a sua volta (sempre per il Corollario 7.2.3) ha un matching perfetto  $M_2$ . Si noti che  $M_2$  è anche un matching perfetto di  $G$ . Iterando questa operazione fino ad ottenere un grafo bipartito 0-regolare, cioè un grafo senza archi, si ottiene un insieme  $M_1, M_2, \dots, M_k$  di matching perfetti di  $G$  che partizionano  $E$ . La tesi segue quindi dall'Osservazione 7.4.3.  $\square$

Ci focalizziamo ora sui grafi cubici, i.e. sui grafi 3-regolari. Su noti che in generale per questi grafi non vale la proprietà del Lemma 7.4.4: è infatti semplice costruire esempi di grafi cubici (ovviamente non bipartiti) con  $\chi'(G) = 4$ . Iniziamo con un semplice corollario dell'Esercizio 2.5.2.

**Corollario 7.4.5.** *In un grafo cubico,  $\delta(S)$  è dispari se e solo se  $|S|$  è dispari.*

Il prossimo lemma illustra una condizione necessaria affinché un grafo cubico sia buono.

**Lemma 7.4.6.** *Sia  $G$  un grafo cubico buono. Allora, per ogni  $S \subseteq V$  con  $|S|$  dispari, vale  $d(S) \geq 3$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $S$  un insieme di vertici di cardinalità dispari in un grafo cubico buono  $G(V, E)$ . Poichè  $S$  è dispari, ogni matching perfetto di  $G$  prende almeno un arco in  $\delta(S)$ . Poichè  $G$  è buono, dall'Osservazione 7.4.3 segue che  $E$  è partizionabile in 3 matching perfetti. Ciascuno di questi prenderà dunque un arco in  $\delta(S)$ , e tali archi dovranno essere distinti. Quindi  $d(S) \geq 3$ .  $\square$

L'Osservazione 7.4.3 ci dice che, al fine di studiare quali grafi cubici siano buoni, ha senso chiedersi quali ammettono un matching perfetto.

**Lemma 7.4.7.** *Se  $G$  è un grafo cubico senza ponti, allora  $G$  contiene un matching perfetto.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che  $G$  sia un grafo cubico senza ponti senza matching perfetto. Allora per il Teorema di Tutte (Teorema 7.3.1), esiste un insieme  $S \subseteq V$  tale che  $|S| < o(G \setminus S)$ . Poiché  $G$  è cubico,

$$3|S| \geq \sum_{v \in S} d(v) \geq d(S) = \sum_{C \in \mathcal{E}(G \setminus S)} d(C) + \sum_{C \in \mathcal{O}(G \setminus S)} d(C) \geq \sum_{C \in \mathcal{O}(G \setminus S)} d(C), \quad (7.1)$$

dove  $\mathcal{E}(G \setminus S)$  è l'insieme delle componenti pari di  $G \setminus S$ , mentre  $\mathcal{O}(G \setminus S)$  è l'insieme delle sue componenti dispari. Sia  $T$  un insieme di vertici dispari di  $G$ . Poiché il grafo è cubico, dal Corollario 7.4.5 otteniamo che  $d(T)$  è dispari. Poiché è senza ponti,  $d(T) \geq 2$  e quindi  $d(T) \geq 3$ . Quindi  $\sum_{C \in \mathcal{O}(G \setminus S)} d(C) \geq 3o(G \setminus S)$ ; confrontando quest'ultima con (7.1), otteniamo  $|S| > o(G \setminus S)$ , una contraddizione.  $\square$

Visto il precedente lemma, ha senso chiedersi se un grafo cubico senza ponti è sempre buono. Tale domanda ha una risposta negativa (si veda l'Esercizio 7.4.2). Per l'Osservazione 7.4.3 non è sempre possibile partizionare gli archi di un grafo cubico senza ponti in 3 matching perfetti. È invece aperta la seguente congettura, secondo cui i grafi cubici senza ponti soddisfano una proprietà un po' più debole della precedente.

**Congettura 7.1.** [Fulkerson]

*Un grafo cubico senza ponti contiene 6 perfect matching tali che ogni arco appartiene a esattamente 2 di questi.*

## Esercizi

**Esercizio 7.1** Data una famiglia  $\mathcal{F}$  finita di insiemi finiti non-vuoti  $S_1, \dots, S_k$ , un insieme di rappresentanti distinti per  $\mathcal{F}$  è un insieme  $X$  tale che  $|X \cap S_i| = 1$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Si dimostri che  $\mathcal{F}$  ha un insieme di rappresentanti distinti se e solo se, per ogni  $t = 1, \dots, k$ , l'unione di  $t$  insiemi tra  $S_1, \dots, S_k$  contiene almeno  $t$  elementi.

**Esercizio 7.2** Si dimostri il Teorema di Hall (Teorema 7.2.1) come conseguenza del Teorema di König (Teorema 7.2.6).

**Esercizio 7.3** Si dimostri il Teorema di Hall (Teorema 7.2.1) come conseguenza del Teorema di Tutte (Teorema 7.3.1).

**Esercizio 7.4** Il grafo di Petersen (cfr. l'Introduzione) è cattivo.

**Esercizio 7.5** Il grafo di Petersen verifica la congettura 7.1.

**Esercizio 7.6** Sia  $G$  un grafo bipartito 2-connesso sugli archi che contiene un matching perfetto  $M$ . Dimostrare che  $G$  contiene un matching perfetto  $M' \neq M$ . (...Prendete un cammino  $M$ -alternante massimale...).

**Esercizio 7.7 (+)** Sia  $G$  un grafo 2-connesso sugli archi che contiene un matching perfetto  $M$ . Dimostrare che  $G$  contiene un matching perfetto  $M' \neq M$ .

# Capitolo 8

## Planarità

### 8.1 Definizioni e primi risultati

Si ricordi che una *curva* nel piano  $\mathbb{R}^2$  è l'immagine di una mappa continua del segmento unitario chiuso, mentre una *curva chiusa* è l'immagine di una mappa continua del cerchio di raggio 1. Una *rappresentazione* di un grafo  $G(V, E)$  è una mappa  $\phi$  che associa ad ogni vertice di  $G$  un punto del piano  $\mathbb{R}^2$ , ed ad ogni arco  $uv \in E$  una curva di  $\mathbb{R}^2$  che ha come estremità i punti  $\phi(u)$ ,  $\phi(v)$ . Tale rappresentazione è detta *piana* se ogni coppia di archi si intersecano al più alle estremità. Un grafo che ammette una rappresentazione piana è detto *planare*. Alle volte, indicheremo indifferentemente con  $G$  un grafo planare ed una sua rappresentazione piana.

Una curva chiusa si dice *semplice* se non si interseca o, detto analogamente, se la mappa tra il cerchio unitario e la curva è iniettiva. Si ricordi il seguente noto teorema di topologia.

**Teorema 8.1.1.** [Jordan]

*Una curva chiusa semplice  $\mathcal{C}$  nel piano  $\mathbb{R}^2$  partiziona  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  in due regioni aperte, una limitata, detta interna ed una illimitata, detta esterna.*

Una rappresentazione piana di un grafo partiziona il piano in una famiglia  $F$  di insiemi aperti tali che, per ogni  $f \in F$ , ogni coppia di punti di  $f$  può essere unita da una curva interamente contenuta in  $f$ . Tali insiemi sono dette *facce*. Si noti che esiste esattamente una faccia illimitata, che è detta *esterna*. Per *frontiera* di una faccia intendiamo la frontiera nell'accezione topologica del termine. Si noti che la

frontiera di una faccia è un insieme di archi che delimitano una curva chiusa (non necessariamente semplice). Il multi-insieme di archi che formano tale curva è detto *perimetro* della faccia. Due facce  $f_1, f_2$  nel cui perimetro appare uno stesso arco  $e$  sono dette *adiacenti*; diciamo inoltre che l'arco  $e$  *separa*  $f_1, f_2$ . I seguenti lemma, che non dimostriamo, forniscono importanti proprietà delle facce di un grafo.

**Lemma 8.1.2.** *In ogni rappresentazione piana di ogni grafo planare, ogni arco appare esattamente due volte nella collezione dei perimetri delle facce del grafo. Detto altrimenti, ogni arco individua esattamente due facce adiacenti (si noti che questa queste due facce potrebbero coincidere).*

**Lemma 8.1.3.** *Sia  $G$  una rappresentazione piana di un grafo planare. Allora, per ogni faccia  $f$  di  $G$ , esiste un rappresentazione piana di  $G$  in cui la faccia esterna ha la stessa frontiera di  $f$ .*

**Lemma 8.1.4.** *Ogni rappresentazione piana di un albero ha una sola faccia.*

**Esercizio 8.1.** *Sia  $G$  una rappresentazione piana di un grafo planare. Se esiste una faccia  $f$  ed un arco  $e$  di  $G$  tale che  $e$  appare 2 volte nel perimetro di  $f$ , allora  $e$  è un ponte di  $G$ .*

La *lunghezza*  $\ell(f)$  di una faccia  $f$  è la cardinalità del suo perimetro. Si ricordi che il perimetro è un multi-insieme, quindi alcuni archi potrebbero essere contati due volte.

**Lemma 8.1.5.** *Per ogni grafo  $G$  planare ed ogni sua rappresentazione piana, vale  $\sum_{f \in F} \ell(f) = 2|E|$ .*

*Dimostrazione.* Immediatamente dalla definizione di  $\ell(f)$  e dal Lemma 8.1.2. □

Data una rappresentazione piana  $G$  di un grafo planare, sia  $G^D(V^D, E^D)$  il grafo definito come segue:

- Ad ogni faccia  $f$  di  $G$  si associ un vertice  $\phi(f)$  di  $V^D$ ;
- $\phi(f)\phi(f') \in E^D$  se e solo se esiste un arco di  $G$  che separa  $f$  ed  $f'$ .

$G^D(V^D, E^D)$  è detto *grafo duale* di  $G$ , e la sua costruzione vista sopra fornisce immediatamente una sua rappresentazione piana. Si noti che la definizione di  $G^D$  dipende dalla rappresentazione piana di  $G$ . Inoltre, anche se  $G$  è semplice, non è detto che  $G^D$  sia semplice.

**Esercizio 8.2.** *Si mostri un grafo  $G$  connesso che ammette due rappresentazioni  $G_1$  e  $G_2$  tali che i rispettivi duali non siano isomorfi. (Suggerimento:  $G$  non deve essere 3-connesso....)*

Concludiamo questa sezione con alcuni lemma, di cui omettiamo la dimostrazione.

**Lemma 8.1.6.** *Per ogni rappresentazione piana  $G$  di un grafo connesso, vale  $G = (G^D)^D$ .*

**Lemma 8.1.7.** *Un arco di  $G$  è un cappio se e solo se è un ponte nel grafo duale; è un ponte se e solo se è un cappio nel grafo duale.*

**Lemma 8.1.8.** *Dato un grafo  $G(V, E)$  3-connesso, planare, senza cappi ed un vertice  $v \in V$ , i vertici adiacenti a  $v$  fanno parte di un ciclo  $C$ .*

### 8.1.1 Formula di Eulero

Mostriamo ora che il numero di facce di un grafo planare connesso dipende unicamente dal suo numero di archi e vertici. A tale fine, introduciamo l'operazione di *suddivisione* di una faccia, che consiste nell'aggiungere (nel grafo e nella sua rappresentazione piana data) un arco tra due vertici appartenenti alla frontiera del grafo stesso ma non adiacenti.

**Osservazione 8.1.9.** *La suddivisione di una faccia aumenta il numero di facce della rappresentazione piana di un grafo di esattamente 1.*

**Teorema 8.1.10.** *Sia  $G$  una rappresentazione piana di un grafo connesso  $G(V, E)$ . Allora  $|V| - |E| + |F| = 2$ .*

*Dimostrazione.* Poichè  $G$  è connesso, ammette un albero ricoprente: si noti che la rappresentazione di  $G$  induce una rappresentazione piana  $T$  di tale albero. Dal Lemma 8.1.4 sappiamo che  $T$  ha una sola faccia. Inoltre, dal Lemma 1.4.2 si ha che  $|E(T)| = |V(T)| - 1$ , Quindi  $|V(T)| - |E(T)| + |F(T)| = 2$  ed il teorema è vero per  $T$ . Si noti che  $G$  può essere costruito da  $T$  aggiungendo un arco alla volta. Poichè  $T$  è connesso, nessun arco è un ponte: l'aggiunta di ogni arco è quindi una suddivisione di una faccia. Dall'Osservazione 8.1.9, segue che l'aggiunta di ogni arco preserva la quantità  $|V| - |E| + |F|$ . Quindi  $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = |V(T)| - |E(T)| + |F(T)| = 2$ .  $\square$

Come immediato corollario del Teorema 8.1.10, otteniamo quanto segue.

**Corollario 8.1.11.** *Tutte le rappresentazioni planari di un grafo hanno stesso numero di facce.*

**Corollario 8.1.12.** *Per un grafo  $G$  semplice, planare, con  $|V| \geq 3$ , vale  $|E| \leq 3(|V| - 2)$ .*

*Dimostrazione.* Si noti che è sufficiente dimostrare la tesi per grafi connessi. Supponiamo dunque  $G$  connesso. Poichè ha almeno 3 vertici,  $\ell(f) \geq 3$  per ogni  $f \in F$ . Quindi

$$3(2 - |V| + |E|) = 3|F| \leq \sum_{f \in F} \ell(f) = 2|E|,$$

dove la prima uguaglianza segue dalla formula di Eulero, la seconda dal Lemma 8.1.5. Manipolando la disequazione  $3(2 - |V| + |E|) \leq 2|E|$  così ottenuta si deriva la tesi.  $\square$

**Corollario 8.1.13.**  *$K_5$  non è planare.*

*Dimostrazione.* Per tale grafo vale  $|E| = 10 > 9 = 3(|V| - 2)$ . La tesi segue dal Corollario 8.1.12.  $\square$

**Corollario 8.1.14.** *In un grafo planare, semplice, esiste un vertice con grado al più 5.*

*Dimostrazione.* Per un grafo planare  $G(V, E)$  con  $d(v) \geq 6$  per ogni  $v \in V$ , si ha  $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq 6|V|$ , dove l'uguaglianza segue dall'Handshaking Lemma, da cui  $|E| \geq 3|V|$ , contraddicendo il Corollario 8.1.12.  $\square$

**Esercizio 8.3.** *Per un grafo bipartito, planare, semplice  $G(V, E)$  con almeno 4 vertici, vale  $|E| \leq 2(|V| - 2)$ .*

## 8.2 Teorema di Kuratowski

È semplice dimostrare che ogni minore di un grafo planare è esso stesso un grafo planare; detto altrimenti, la classe dei grafi planari è chiusa rispetto a prendere i minori. Definiamo *criticamente non planare* un grafo non planare i cui minori *stretti* (cioè distinti dal grafo stesso) sono tutti dei grafi planari. Il seguente teorema caratterizza i grafi con questa proprietà.

**Teorema 8.2.1.** [Kuratowski]

$G$  è planare se e solo se non contiene nè  $K_5$  nè  $K_{3,3}$  come minori.

*Dimostrazione.* La non planarità di  $K_5$  è dimostrata nel Corollario 8.1.13, mentre quella di  $K_3$  segue immediatamente dall' Esercizio 8.3. Poiché i minori di un grafo planare sono anch'essi planari, ne segue che un grafo planare non contiene  $K_3$  e  $K_5$  come minori.

Per dimostrare l'implicazione opposta, supponiamo per assurdo che  $G$  non sia un grafo planare, ma non abbia  $K_{3,3}$  e  $K_5$  come minori. Supponiamo inoltre che  $G$  sia un minimo controesempio, i.e. tra tutti tali grafi, sia uno che minimizza  $n(G)$ . La dimostrazione del prossimo claim è lasciata per esercizio.

**Claim 1:**  $G$  è semplice.

Si noti che ogni grafo semplice con al più 4 vertici è planare, quindi  $n(G) \geq 5$ .

**Claim 2:**  $G$  è 3-connesso.

*Dimostrazione.* Mostriamo anzitutto che  $G$  è connesso: se non lo fosse, allora per almeno una delle sue componenti connesse, diciamo  $C$ , vale  $G[C]$  non planare. Poiché  $G[C]$  è un minore di  $G$ , contraddiremmo la minimalità di  $G$ . Mostriamo ora che  $G$  è 2-connesso. Supponiamo non lo sia, allora esiste uno snodo  $v$ . Siano  $C_1, \dots, C_k$  le componenti connesse di  $G_{\setminus v}$ , e si considerino i grafi  $G_i(V_i, E_i) = G[C_i \cup \{v\}]$ . Per la minimalità di  $G$ , ciascuno dei grafi  $G_i$  è planare. Dal Lemma 8.1.3, esiste una rappresentazione piana di ciascuno di questi grafi in cui il perimetro della faccia esterna è  $v$  nella faccia esterna. Si può quindi ottenere una rappresentazione piana di  $G$  disegnando una tale rappresentazione per  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ed identificando le copie di  $v$  in un unico vertice, una contraddizione.

Mostriamo ora che  $G$  è 3-connesso. Se non lo fosse, esisterebbe un separatore  $S = \{u, v\}$  di  $G$  per qualche coppia di vertici distinta  $u, v$ . Sia  $C_1$  una componente connessa di  $G_{\setminus S}$ , e  $C_2 = V \setminus C_1$ . Per  $i = 1, 2$ , si considerino i grafi  $G_i(V_i, E_i) = G[C_i \cup \{u, v\}]$ . Si noti che esistono cammini  $P_1, P_2$  tra  $u$  e  $v$  in  $G_1$  ed in  $G_2$ . Infatti,  $G_1$  è connesso per definizione. Supponiamo per assurdo che tale cammino non esista in  $G_2$ : poiché almeno uno tra  $u$  e  $v$  ha un adiacente in  $G_2$ , diciamo  $u$ , allora  $G_{\setminus u}$  sarebbe disconnesso, contraddicendo il fatto che  $G$  è 2-connesso. Quindi  $P_1$  e  $P_2$  sono ben definiti. Per  $i = 1, 2$ , il grafo  $G'_i$  ottenuto da  $G_i$  aggiungendo l'arco  $e_i = uv$  è un minore di  $G$ . Infatti,  $G'_1$  è ottenibile da  $G$  scegliendo un cammino  $P_2$  tra  $u$  e  $v$  in  $G_2$ , eliminando i vertici di  $G_2$

che non appartengono a tale cammino, infine contraendo gli archi di  $P_2$ . Similmente, si può ottenere  $G'_2$ . Per la minimalità di  $G$ , si ha che  $G'_1, G'_2$  sono planari. Per il Lemma 8.1.3, per  $i = 1, 2$  è possibile disegnare una rappresentazione piana di  $G'_i$  in cui  $e_i$  appartiene al perimetro della faccia esterna. Se  $uv \notin E$  è quindi possibile ottenere una rappresentazione piana di  $G$  a partire da quelle di  $G'_1, G'_2$  identificando le due copie di  $u$ , le due copie di  $v$ , gli archi  $e_1, e_2$  in un arco  $e$  ed eliminando quest'ultimo. Si può ragionare analogamente se  $uv \in E$ . Questo contraddice di nuovo la non-planarità di  $G$ , da cui deduciamo la 3–connessione di  $G$ .  $\square$

Per il Teorema 6.4.1, se  $G$  è 3–connesso, allora esiste un arco  $e = uv$  di  $G$  tale che  $G' = G_{/e}$  è 3–connesso. Si noti che, per la minimalità di  $G$ ,  $G'$  è anche planare. Sia  $z$  il vertice di  $G'$  ottenuto identificando i vertici  $u, v$  di  $G$ . Dal Lemma 8.1.8, gli adiacenti a  $z$  in  $G'$  fanno parte di un ciclo  $C$  di  $G'$ . Poichè  $G'$  è planare,  $C$  delimita una faccia  $f$  di  $G'' = G_{\setminus z}$  e per il Lemma 8.1.3, esiste una rappresentazione piana di  $G''$  in cui  $f$  è una faccia interna del grafo. Si ottenga dunque una rappresentazione piana di  $G'$  partendo da una tale rappresentazione piana di  $G''$  ed aggiungendo il vertice  $z$  all'interno di tale faccia  $f$ , che viene dunque suddivisa "spicchi" (si veda la Figura 8.1 (a)).



**Figura 8.1:** (a): L'inserimento di  $z$  divide in "spicchi" la faccia  $f$ ; (b):  $u, v$  sono annidati, da una rappresentazione piana di  $G'$  ottengo una rappresentazione piana di  $G$ .

Dato un grafo  $G(V, E)$  ed un suo ciclo  $C$ , due vertici  $u, v \in V$  si dicono *annidati* (in  $G$  rispetto a  $C$ ) se esistono due vertici  $x, y \in N(v) \cap C$  tali che, designati con  $P_1$  e  $P_2$  i cammini tra  $x$  ed  $y$  su  $C$ , si ha che tutti i vicini di  $u$  sono contenuti in  $P_1$  e

tutti i vicini di  $v$  sono contenuti in  $P_2$  (si veda la Figura 8.1 (b)). La dimostrazione del prossimo claim è lasciata come esercizio.

**Claim 3:** Dato un ciclo  $C$ ,  $u, v \notin C$  con vicini in  $C$  ma non annidati rispetto a  $C$ , almeno uno dei due casi successivi è verificato:

- a) esistono  $u', u'' \in N(u) \cap C$ ,  $v', v'' \in N(v) \cap C$ ,  $u', u'', v', v''$  sono distinti e appaiono nel ciclo in questa sequenza:  $u', v', u'', v''$ ;
- b)  $|N(u) \cap N(v) \cap C| \geq 3$ .

**Claim 4:**  $u, v$  non sono annidati in  $G$  rispetto a  $C$ .

*Dimostrazione.* Se lo fossero, sarebbe possibile ottenere una rappresentazione piana di  $G$  partendo dalla rappresentazione piana di  $G'$  e sostituendo il vertice  $z$  con una coppia di vertici  $u, v$  adiacenti (si veda la Figura 8.1 (b)).  $\square$

Dai Claim 3 e 4, segue che vale una delle due seguenti proprietà:

- a) esistono  $u', u'' \in N(u) \cap C$ ,  $v', v'' \in N(v) \cap C$ ,  $u', u'', v', v''$  sono distinti e appaiono nel ciclo in questa sequenza:  $u', v', u'', v''$ ;
- b)  $|N(u) \cap N(v) \cap C| \geq 3$ .

Si supponga di essere nel caso a). Si considerino i seguenti sottocammini di  $C$  a coppie internamente disgiunti:  $P_1$  tra  $u'$  e  $v'$ ,  $P_2$  tra  $v', u''$ ,  $P_3$  tra  $u'', v''$ ,  $P_4$  tra  $v'', u'$ . Allora  $K_{3,3}$  è ottenibile come minore di  $G$  come segue: si eliminino tutti i vertici di  $V \setminus (C \cup \{u, v\})$  e tutti gli archi non appartenenti a  $\{u'u, u''u, v'v, v''v\} \cup_{i=1}^4 P_i$ ; si contraggano i cammini  $P_1, P_2, P_3, P_4$  nelle loro estremità.

Si supponga di essere nel caso b) e siano  $w, t, z \in N(u) \cap N(v) \cap C$ . Si noti che in  $C$  esistono cammini  $P_1$  tra  $w$  e  $t$ ,  $P_2$  tra  $t$  e  $z$  e  $P_3$  tra  $z$  e  $w$  che sono internamente disgiunti a coppie. Ragionando analogamente al caso precedente, è possibile ottenere  $K_5$  come minore.  $\square$



# Capitolo 9

## Colorazione dei vertici

### 9.1 Teorema dei 4 colori e generalizzazioni

Dato un grafo  $G(V, E)$ , una *colorazione (dei vertici) di  $G$  con  $k$  colori* è una funzione  $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tale che  $\phi(u) \neq \phi(v)$  per ogni  $uv \in E$ . Data una  $k$ -colorazione di  $G$ , indicheremo i colori utilizzati con gli interi da 1 a  $k$ . Se esiste una colorazione di  $G$  con  $k$  colori, allora  $G$  è detto  $k$ -colorabile. Dato un grafo  $G$ , il *numero cromatico*  $\chi(G)$  è il minimo intero  $k$  tale che  $G$  è  $k$ -colorabile. Si noti anzitutto che possiamo assumere senza perdita di generalità che il grafo in input sia senza cappi (altrimenti  $G$  non è  $k$ -colorabile per ogni  $k$ ) e semplice (poiché il numero cromatico di un grafo senza cappi e del suo scheletro banalmente coincidono). Ometteremo quindi di ribadire ogni volta che i grafi in esame hanno queste proprietà.

**Teorema 9.1.1.** [Teorema dei 4 colori]

*Un grafo planare è 4-colorabile.*

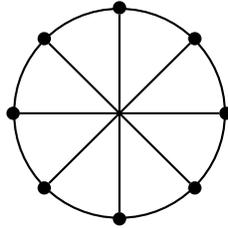
La dimostrazione del precedente teorema è molto complessa ed allo stato attuale non ne esiste alcuna che non utilizzi l'ausilio di computazioni al computer. Dal Teorema di Kuratowski, sappiamo che un grafo planare non contiene  $K_5$  come minore. Uno statement (apparentemente) più forte del Teorema dei 4 colori è quindi il seguente:

**Teorema 9.1.2.** *Se  $G$  non contiene  $K_5$  come minore, allora  $\chi(G) \leq 4$ .*

Mostriamo ora che, in realtà, quest'ultimo teorema è una conseguenza del Teorema dei 4 colori. Iniziamo con alcune definizioni: dati due grafi disgiunti sui vertici

$G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  e insiemi  $U_1 \subseteq V_1, U_2 \subseteq V_2$  tali che  $|U_1| = |U_2| = k$  e  $G_1[U_1], G_2[U_2]$  sono grafi completi, la  $k$ -sum di  $G_1$  e  $G_2$  è data dal grafo ottenuto da  $G_1 \cup G_2$  identificando i vertici di  $U_1$  con i vertici di  $U_2$  e rimuovendo gli archi tra i vertici di  $U_2$ .

**Teorema 9.1.3.** [Wagner] *Se  $G$  non contiene  $K_5$  come minore ed è massimale con questa proprietà, allora  $G$  è la 1–2–3 sum di grafi planari e di copie di  $V_8$ , che è il grafo in Figura 9.1.*



**Figura 9.1:** Il grafo  $V_8$ .

**Esercizio 9.1.**  $V_8$  contiene  $K_{3,3}$  ma non  $K_5$  come minore.

**Esercizio 9.2.** Se  $G$  è ottenuto dalla 1–sum, o dalla 2–sum, o dalla 3–sum di  $G_1$  e  $G_2$  e  $G_1, G_2$  non contengono  $K_5$  come minore, allora  $G$  non contiene  $K_5$  come minore.

**Esercizio 9.3.** Se  $G$  è ottenuto dalla 1–sum, o dalla 2–sum, o dalla 3–sum di  $G_1$  e  $G_2$  e  $\chi(G_1), \chi(G_2) \leq 4$ , allora  $\chi(G) \leq 4$ .

**Domanda 9.1.** Se  $G$  è ottenuto dalla 1–sum, o dalla 2–sum, o dalla 3–sum di  $G_1$  e  $G_2$  e  $G_1, G_2$  sono planari, allora  $G$  è planare ?

*Dimostrazione. (del Teorema 9.1.2)*

Sia  $G$  un grafo che non ha  $K_5$  come minore. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che sia massimale con questa proprietà. Per il Teorema 9.1.3, allora  $G$  è la 1–2–3 sum di grafi planari e di copie di  $V_8$ . Per il Teorema dei 4 colori, ogni grafo planare è 4–colorabile. È immediato verificare che  $\chi(V_8) = 3$ . La tesi quindi segue dall'Esercizio 9.3.  $\square$

### 9.1.1 Teorema di Tait

Dato un grafo  $G$ , una *colorazione delle facce di  $G$*  è una mappa che associa ad ogni faccia di  $G$  un colore, con la proprietà che due facce con uno arco in comune abbiano colori diversi. Si ricordi che un grafo semplice  $G$  è buono (cfr. Sezione 7.4) se e solo se  $\chi'(G) = d_{\max}(G)$ .

#### Teorema 9.1.4. [Tait]

*Sia  $G$  la rappresentazione piana di un grafo planare cubico senza ponti. Allora le facce di  $G$  sono colorabili con 4 colori se e solo se  $G$  è buono.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  cubico, planare, senza ponti.

Supponiamo che le facce di  $G$  siano 4-colorabili. Associamo ad ogni colore un numero in codifica binaria (i.e. 00, 01, 10, 11). Dato un arco  $e \in E$  che separa due facce  $f, f'$ , gli assegniamo il numero binario  $c(e)$  dato dalla somma binaria dei numeri associati ad  $f, f'$ . Si noti che a nessun arco sarà associata l'etichetta 00: infatti una tale etichetta sarebbe associata ad un arco che separa una stessa faccia: per l'Esercizio 8.1, tale arco sarebbe un ponte, una contraddizione. Quindi  $c(e)$  definisce una 3-colorazione degli archi del grafo. Sfruttando il fatto che ogni vertice di  $G$  è contenuto in esattamente 3 facce del grafo poichè  $G$  è cubico, è semplice vedere che  $c(e)$  definisce una colorazione ammissibile: i dettagli sono lasciati per esercizio.

Supponiamo ora che  $G$  abbia una 3-colorazione ammissibile degli archi e si consideri il sottografo  $G'(V, E')$  di  $G$ , con  $E'$  insieme degli archi di  $G$  colorati con i colori 1 e 2. Si noti che, poichè  $G$  è buono, ogni vertice ha esattamente un arco colorato con 1 ed esattamente un arco colorato con 2,  $G'$  è 2-regolare. Dall'Esercizio 7.1, segue che  $G'$  è un insieme di cicli. Dalla rappresentazione piana  $G$  di  $G(V, E)$  è possibile ottenere una rappresentazione piana di  $G'$  eliminando le curve relative agli archi colorati con 3. Tale rappresentazione sarà data da una famiglia di curve semplici, chiuse e *concentriche*, i.e. tale che per ogni coppia di tali curve  $C_1, C_2$  o il perimetro di  $C_1$  è contenuto nella regione interna delimitata da  $C_2$ , o viceversa, o le due regioni interne ed i due perimetri non si intersecano. È quindi possibile associare ad ogni faccia  $f$  un *livello*, pari al numero di facce la cui regione interna contiene il perimetro di  $f$ . Per quanto osservato, due facce in un livello della stessa parità non hanno alcun arco in comune. È quindi possibile

ottenere una 2-colorazione di  $G'$  assegnando alle facce di livello pari il colore 0, alle facce di livello dispari il colore 1.

È possibile ripetere lo stesso argomento di sopra per il sottografo  $G''$  di  $G$  ottenuto eliminando gli archi colorati con 2. Analogamente a quanto fatto per  $G'$ , si associ ad ogni faccia di  $G''$  un valore 0/1. Si osservi infine che ogni faccia di  $G$  è data dall'intersezione di una faccia di  $G'$  ed una faccia di  $G''$ . Si associ ora ad ogni faccia di  $G$  il numero binario a due cifre dato dalla giustapposizione dei numeri binari associati (ad esempio, ad una faccia  $f$  di  $G$  che è l'intersezione di una faccia  $f'$  di  $G'$  con valore 1 ed una faccia  $f''$  di  $G''$  con valore 0, si associ il numero 10): quella ottenuta è una 4-colorazione delle facce di  $G$ . Al fine di dimostrare il teorema, è quindi sufficiente il prossimo claim, lasciato per esercizio.

**Claim 1:** La 4-colorazione delle facce di  $G$  è ammissibile. □

Utilizzando il teorema di Tait è possibile fornire una versione alternativa del Teorema dei 4 colori.

**Teorema 9.1.5.** *Il teorema dei 4 colori è vero se e solo se ogni grafo planare cubico senza ponti è buono.*

## 9.2 Teorema di Brooks, Teorema dei 5-colori

Mentre la dimostrazione del Teorema 9.1.1 è difficile, è semplice dimostrare dei bound più deboli sul numero cromatico di un grafo planare. Dato un ordinamento  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , una *colorazione sequenziale* di  $G$  è ottenuta come segue: per  $i = 1, \dots, n$ , si colori  $v_i$  con il colore di indice minimo tra tutti quelli non utilizzati per colorare i vicini di  $v_i$  con pedice  $\ell < i$ . Rispetto all'ordinamento dato, il *grado all'indietro*  $d_i^{back}$  di un vertice  $v_i$  è il numero di vicini di  $v_i$  con pedice  $\ell < i$ , i.e. il valore  $|\{v_\ell \in N(v_i) : \ell < i\}|$ . Sia  $d_{\max}^{back} = \max_{v_i \in V} d_i^{back}$ .

**Lemma 9.2.1.** *Ogni grafo è  $d_{\max}^{back} + 1$ -colorabile.*

*Dimostrazione.* Per ciascun vertice  $v_i$ , i vicini di  $v_i$  con pedice  $\ell < i$  utilizzeranno al più  $d_i^{back} \leq d_{\max}^{back}$ , e quindi, tra i primi  $d_{\max}^{back} + 1$ , esisterà sempre un colore disponibile con cui colorare  $v_i$ . Quindi  $\chi(G) \leq d_{\max}^{back} + 1$ . □

**Corollario 9.2.2.** *Ogni grafo è  $d_{\max} + 1$ -colorabile.*

*Dimostrazione.* Utilizzando il Lemma 9.2.1, si ha  $\chi(G) \leq d_{\max}^{\text{back}} + 1 \leq d_{\max} + 1$ .  $\square$

In realtà, il bound dato dal precedente lemma è raramente verificato, come provato dal seguente teorema, che non dimostriamo.

**Teorema 9.2.3.** [Brooks]

*Se lo scheletro di  $G$  non è un ciclo di lunghezza dispari o una clique, allora  $\chi(G) \leq d_{\max}$ .*

**Lemma 9.2.4.** *Un grafo planare è 6-colorabile.*

*Dimostrazione.* Definiamo un opportuno ordinamento dei vertici del grafo in modo che valga  $d_{\max}^{\text{back}} \leq 5$ . La tesi quindi segue dal Lemma 9.2.1. Dal Corollario 8.1.14, sappiamo che ogni grafo planare ha un vertice di grado al più 5: assegniamo a tale vertice etichetta  $v_n$ . Poiché un sottografo di un grafo planare è anch'esso planare, esiste un vertice di  $G_{\setminus v_n}$  che ha al più grado 5: assegno a tale vertice etichetta  $v_{n-1}$ . Iterando, ottengo un ordinamento  $v_1, \dots, v_{|V|}$  in cui ogni vertice ha grado all'indietro al più 5. La tesi segue.  $\square$

**Teorema 9.2.5.** *Un grafo planare è 5-colorabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un controesempio che minimizza  $n(G) + m(G)$ . Per la minimalità di  $G$ , l'eliminazione di un qualsiasi vertice di  $G$  rende  $G$  5-colorabile. In particolare, questo è vero per il vertice  $v$  di  $G$  con grado al più 5, che esiste per il Corollario 8.1.14. Sia  $G' = G_{\setminus v}$ :

**Claim 1:**  $v$  ha esattamente 5 vicini in  $G$  ed ogni 5-colorazione  $\phi$  di  $G'$  colora tali vicini con i colori  $1, \dots, 5$ .

*Dimostrazione.* Si supponga che esista una 5-colorazione  $\phi$  di  $G'$  in cui un colore, diciamo 1, non è rappresentato nell'intorno di  $v$ . Allora sarebbe possibile estenderla ad una 5-colorazione di  $G$  assegnando il vertice 1 al colore  $v$ . Quindi ciascuno dei colori  $1, \dots, 5$  è utilizzato per colorare uno dei vertici adiacenti a  $v$ . Da questo segue anche che  $d(v) = 5$ .  $\square$

Si consideri il sottografo  $G''$  di  $G'$  indotto dai vertici colorati in  $\phi$  dai colori  $1, 2$ . Si noti che  $G''$  è bipartito, perchè altrimenti due vertici adiacenti dovrebbero essere

colorati con uno stesso colore, una contraddizione. Siano  $v_1, v_2$  i vertici adiacenti a  $v$  e colorati rispettivamente con 1 e 2.

**Claim 2:** esiste un cammino  $P_{12}$  in  $G''$  tra  $v_1$  e  $v_2$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo non esista:  $v_1$  e  $v_2$  sono dunque in due componenti connesse distinte di  $G''$  e sia  $C$  la componente connessa di  $v_1$ . Invertendo i colori dei vertici di  $C$  (cioè colorando con 1 quelli che erano colorati con 2 e viceversa) otteniamo una nuova 5-colorazione ammissibile di  $G'$ , in cui, in particolare,  $v_1$  è colorato con 2. In tale colorazione non esiste dunque alcun vertice dell'intorno di  $v$  che è colorato con 1, contraddicendo il Claim 1.  $\square$

Il cammino  $P_{12}$  può essere esteso ad un ciclo  $C_{12}$  di  $G$  aggiungendo gli archi  $vv_1$  e  $vv_2$ . Il Claim 2 può essere ripetuto per ogni coppia  $i, j$  con  $i \neq j, i, j \geq 5$ , in modo da ottenere i cammini  $P_{ij}$  ed i cicli  $C_{ij}$ . Sfruttando la planarità di  $G$ , si può dimostrare il seguente claim, lasciato per esercizio.

**Claim 3:** In ogni rappresentazione piana di  $G$ , esistono quattro indici distinti  $i, j, k, \ell \leq 5$  tale che  $v_k$  è contenuto nella porzione di piano finita delimitata da  $C_{ij}$ , mentre  $v_\ell$  in quella infinita.

Si prenda una rappresentazione piana di  $G$  e senza perdita di generalità, vale  $i = 1, j = 2, k = 3, \ell = 4$  nel claim precedente. Si consideri una 5-colorazione di  $G'$  e la si estenda ad una colorazione di  $G$ , assegnando a  $v$  il colore 6. Poichè  $v_3$  appartiene alla porzione di piano finita delimitata da  $C_{12}$ , mentre  $v_4$  a quella infinita, il cammino  $P_{34}$  dovrà uscire in qualche punto dalla porzione di piano finita da  $C_{12}$ . Poichè i vertici di  $C_{12}$  sono colorati con 1, 2, 6, mentre il cammino tra  $P_{34}$  è fatto da vertici colorati 3, 4, non è possibile che tale uscita avvenga in corrispondenza di un vertice. Questo implica che un arco di  $P_{34}$  ed un arco di  $C_{12}$  si intersecano, una contraddizione al fatto che  $G$  sia una rappresentazione piana.  $\square$

### 9.3 Conggettura di Hadwinger e Teorema di Mader

Una immediata generalizzazione del Teorema 9.1.2 è la seguente, notissima congettura.

**Conggettura 9.1.** [Hadwinger]

Sia  $q \in \mathbb{Z}_+$ . Se  $G$  non contiene  $K_q$  come minore, allora  $\chi(G) \leq q - 1$ .

Non è tuttora noto se la congettura precedente sia vera. É però vero che esiste una funzione dipendente solo dal parametro  $q$  che limita il numero cromatico del grafo. Per dimostrarlo, iniziamo con il seguente lemma.

**Lemma 9.3.1.** *Sia  $q \in \mathbb{Z}_+$ . Se  $G$  è un grafo semplice e non contiene  $K_q$  come minore, allora  $m(G) < 3^q n(G)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G(V, E)$  un grafo senza  $K_q$  come minore e supponiamo, per assurdo, che sia un controesempio al lemma. Inoltre, assumiamo che  $G$  sia un minimo controesempio, cioè ogni minore di  $G$  distinto da  $G$  stesso soddisfa il teorema. Vale dunque  $\sum_{v \in V} d(v) = 2m(G) \geq 2 \cdot 3^q n(G)$ . Esiste dunque almeno un vertice  $u \in V$  tale che  $d(u) \geq 2 \cdot 3^q$ . Sia  $G_u$  il sottografo di  $G$  indotto dai vicini di  $u$ . Si noti che tali vicini sono almeno  $2 \cdot 3^q$ , perchè  $G$  è semplice. Per la minimalità di  $G$ ,  $G_u$  non contiene il grafo  $K_{q-1}$  come minore: infatti, se tale minore esistesse, sarebbe immediato costruire un minore  $K_q$  di  $G$  (aggiungendo il vertice  $u$  a  $K_{q-1}$ ). Inoltre, è semplice osservare che  $G_u$  è un minore di  $G$ . Quindi  $G_u$  non è un controesempio al teorema, da cui segue  $\sum_{v \in V \setminus \{u\}} d(v) = 2m(G_u) \leq 2 \cdot 3^{q-1} n(G_u)$ . Esiste dunque un vertice  $w \in V \setminus \{u\}$  tale che  $d_{G_u}(w) < 2 \cdot 3^{q-1}$ . Sia  $G'$  lo scheletro del grafo  $G_{/uw}$ . Si noti che, passando da  $G$  a  $G'$ , perdo esattamente  $d_{G_u}(w) + 1$  archi: infatti per ogni vertice  $z$  adiacente a  $w$  in  $G_u$ , ci saranno due archi paralleli in  $G_{/uw}$ ; inoltre, l'arco  $uw$  diventerà un cappio sul nuovo vertice  $uv$ . Quindi

$$m(G) - m(G') = d_{G_u}(w) + 1 < 2 \cdot 3^{q-1}. \quad (9.1)$$

Inoltre,  $G'$  è un minore stretto di  $G$  e quindi per ipotesi non contiene  $K_q$  come minore. Anche  $G'$  soddisfa quindi il lemma, cioè  $m(G') < 3^q n(G') = 3^q (n(G) - 1) = 3^q n(G) - 3^q \leq m(G) - 3^q$ , dove l'ultima diseuguaglianza segue dal fatto che  $G$  è un controesempio al lemma. Confrontando quest'ultima relazione con (9.1), otteniamo  $3^q < m(G) - m(G') \leq 2 \cdot 3^{q-1}$ , quindi  $3^q < 2 \cdot 3^{q-1}$ , che è sempre falso per ogni  $q \geq 1$ . Otteniamo dunque la contraddizione desiderata.  $\square$

**Teorema 9.3.2.** [Mader]

*Sia  $q \in \mathbb{Z}_+$ . Se  $G$  non contiene  $K_q$  come minore, allora  $\chi(G) \leq 2(3^q - 1) + 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G(V, E)$  un grafo senza  $K_q$  come minore e supponiamo per assurdo sia un controesempio al teorema. Senza perdita di generalità, assumiamo che  $G$  sia semplice. Per il Lemma 9.3.1, vale  $\sum_{v \in V} d(v) = 2m(G) \leq 2(3^q n(G) - 1)$ . Esiste quindi un vertice  $v_n \in V$  tale che  $d(v_n) \leq 2(3^q - 1)$ . Si noti che lo stesso argomento è vero per il grafo  $G \setminus v_n$ , perché quest'ultimo è ancora un grafo semplice che non contiene  $K_q$  come minore. Esiste quindi un vertice  $v_{n-1} \in V \setminus \{v_n\}$  che ha grado al più  $2(3^q - 1)$ . Iterando questo argomento, è possibile ottenere un ordinamento  $v_1, \dots, v_n$  dei vertici del grafo tale che  $d_{\max}^{back} = \max_{i=1, \dots, n} d_i^{back} \leq 2(3^q - 1)$ . La tesi quindi segue dal Lemma 9.2.1.  $\square$

**Esercizio 9.4.** Per ogni  $\ell \in \mathbb{Z}_+$ , esiste un  $q \in \mathbb{Z}_+$  tale che  $K_\ell$  è un minore di  $K_{q,q}$ .

# Capitolo 10

## Cicli hamiltoniani e tour euleriani

### 10.1 Definizioni, condizioni necessarie per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano

Un ciclo di un grafo è detto *hamiltoniano* se contiene tutti i vertici di un grafo. Il problema di decidere se un grafo ammette un ciclo hamiltoniano è tra i più noti della teoria dei grafi. Non è ad oggi noto un algoritmo polinomiale per decidere se un grafo è hamiltoniano, e si congetture fortemente che un tale algoritmo non esista (più formalmente: decidere se un grafo è hamiltoniano è un problema NP-Completo). Non è quindi ragionevole aspettarsi delle condizioni necessari e sufficienti di facile verifica per decidere se un grafo  $G$  ha tale proprietà.

Si noti che possiamo senza perdita di generalità assumere che i grafi in esame siano semplici (l'aggiunta di archi paralleli non rende hamiltoniani grafi non hamiltoniani e viceversa) e connessi (altrimenti il grafo non è sicuramente hamiltoniano). È inoltre immediato osservare che un grafo completo con  $n \geq 3$  è hamiltoniano: ogni ordinamento dei vertici di un tale grafo dà origine ad un ciclo hamiltoniano. Iniziamo con l'illustrare una semplice proprietà necessaria affinché un grafo sia hamiltoniano.

**Lemma 10.1.1.** *Se un grafo  $G(V, E)$  è hamiltoniano, allora per ogni sottoinsieme non vuoto  $S$  di  $V$ , si ha  $\gamma(G \setminus S) \leq |S|$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G(V, E)$  hamiltoniano,  $S \subseteq V$ ,  $S \neq \emptyset$ . Sia  $C = v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_nv_1, v_1$  un ciclo hamiltoniano di  $G$ , assumendo senza perdita di generalità che  $v_n \in S$ . Per

ogni componente connessa  $T$  di  $G \setminus S$ , sia  $v_{i_T}$  il vertice di  $C$  con pedice più piccolo tra quelli appartenenti a  $T$ , e sia  $v_{i'_T}$  il primo vertice con pedice maggiore di  $i_T$  che non appartiene a  $T$ . Si noti che  $i'_T$  è ben definito, perché  $v_n \in S$ . Quindi  $v_{i'_T-1} \in T$  e, poiché non esistono archi in  $G$  tra  $T$  e le altre componenti connesse di  $G \setminus S$ ,  $v_{i'_T} \in S$ . Inoltre per due componenti  $T_1 \neq T_2$  di  $G \setminus S$ , vale  $v_{i'_{T_1}-1} \neq v_{i'_{T_2}-1}$  e quindi  $i'_{T_1} \neq i'_{T_2}$ . Poiché  $C$  passa esattamente una volta per ogni vertice, ne concludiamo che  $v_{i'_{T_1}} \neq v_{i'_{T_2}}$ . Quindi  $|S| \geq \gamma(G \setminus S)$ .  $\square$

## 10.2 Condizioni sufficienti per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano

### 10.2.1 La chiusura di un grafo

Dato un grafo semplice  $G(V, E)$  e due vertici  $u, v \in V$  non adiacenti e tali che  $d(u) + d(v) \geq n$ , definiamo il grafo  $G + uv$  come il grafo ottenuto da  $G$  aggiungendo l'arco  $uv$ . Definiamo *chiusura*  $c(G)$  di  $G$  il grafo costruito iterativamente scegliendo una coppia di vertici  $u, v$  come sopra e rimpiazzando  $G$  con  $G + uv$ , finché una tale coppia di vertici esiste.

**Lemma 10.2.1.** *La chiusura di un grafo è ben definita, i.e. il grafo  $c(G)$  esiste ed è unico.*

*Dimostrazione.* Poiché l'operazione di chiusura aggiunge archi solo tra vertici non adiacenti, esiste un numero finito di archi che è possibile aggiungere a  $G$ . È quindi sufficiente dimostrare che la chiusura è unica. Supponiamo, per contraddizione, ne esistano almeno due diverse,  $G'$  e  $G''$  e siano  $e_1, \dots, e_k$  ed  $f_1, \dots, f_{k'}$  gli archi aggiunti a  $G$  per ottenere rispettivamente  $G'$  e  $G''$ , con  $e_i$  aggiunto prima di  $e_{i+1}$  per ogni  $i$ , e similmente per  $f_1, \dots, f_{k'}$ . Sia  $e_t = uv$  un arco che non appartiene a  $G''$  e tale che  $e_1, \dots, e_{t-1} \in E(G'')$  e sia  $H$  ottenuto da  $G$  aggiungendo gli archi  $e_1, \dots, e_{t-1}$ . Per costruzione,  $d_H(u) + d_H(v) \geq n(H) = n(G)$ . Per ipotesi,  $H$  è un sottografo di  $G''$ , quindi  $d_{G''}(u) + d_{G''}(v) \geq d_H(u) + d_H(v) \geq n(H) = n(G) = n(G'')$ . Questo contraddice l'assunzione che  $e_t$  non sia un arco di  $G''$ . Quindi ogni arco di  $G'$  è un arco di  $G''$  e per simmetria vale anche il viceversa. Quindi  $G' = G''$ , concludendo la prova.  $\square$

Mostriamo ora che la proprietà di essere hamiltoniano è chiusa rispetto alla chiusura di un grafo.

**Teorema 10.2.2.** *Sia  $G$  un grafo semplice e  $G'$  la sua chiusura. Allora  $G$  è hamiltoniano se e solo se  $G'$  è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Sicuramente se un grafo è hamiltoniano, allora la sua chiusura è hamiltoniana. È quindi sufficiente dimostrare che, dato un grafo  $G$  con  $n \geq 3$  non hamiltoniano ed una coppia di vertici non adiacenti  $u, v$  con  $d(u) + d(v) \geq n$ , l'aggiunta dell'arco  $uv$  rende  $G$  hamiltoniano: lo statement sulla chiusura segue immediatamente per induzione. Sia, per contraddizione,  $G(V, E)$  un grafo per cui questo statement non è vero, i.e. sia  $G$  un grafo nonhamiltoniano tale che  $G' = G + uv$  è hamiltoniano, ove  $u, v$  sono vertici non adiacenti di  $G$  con  $d(u) + d(v) \geq n$ . Sia inoltre  $C'$  un ciclo hamiltoniano su  $G'$ . Si noti che  $C'$  contiene l'arco  $u, v$ , altrimenti sarebbe un ciclo hamiltoniano anche in  $G$ . Quindi possiamo assumere  $C' = u = v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{n-1} = v, vu, u$ . Si consideri ora il cammino  $P$  da  $u$  a  $v$  su  $G'$  definito da  $u = v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1} = v$ . Poiché non contiene l'arco  $uv$ ,  $P$  è anche un cammino tra  $u$  e  $v$  su  $G$ . Inoltre, passa esattamente una volta su ogni vertice di  $G$ . Definiamo gli insiemi

$$S = \{v_i \in P : uv_{i+1} \in E\} \text{ e } T = \{v_i \in P : vv_i \in E\}.$$

Si noti che  $d(u) = |S|$  e  $d(v) = |T|$ . Inoltre,  $v \notin S \cup T$ , quindi  $|S \cup T| \leq n - 1$ .

**Claim 1:**  $S \cap T = \emptyset$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per contraddizione esista un vertice  $v_i \in S \cap T$ . Abbiamo già osservato che  $v_i \neq v$ , mentre  $v_i \neq u$  segue dal fatto che  $u \notin T$ . Quindi  $2 \leq i \leq n - 1$ . Allora  $C = v_1, \dots, v_i, v_iv_n, v_n, v_nv_{n-1}, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_{i+1}v_1, v_1$  è un ciclo di  $G$ , poiché  $E(C) = (E(C') \setminus \{uv, v_iv_{i+1}\}) \cup \{v_1v_{i+1}, v_iv_n\}$ , e gli archi  $v_1v_{i+1}, v_iv_n \in E$  per ipotesi. Questo contraddice l'ipotesi che  $G$  non sia hamiltoniano.  $\square$

Otteniamo dunque

$$d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| = |S \cup T| < n,$$

contraddicendo l'ipotesi.  $\square$

**Corollario 10.2.3.** *Un grafo semplice con  $n \geq 3$  vertici e chiusura  $K_n$  è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Immediatamente dal Teorema 10.2.2 e dal fatto che un grafo completo con almeno 3 vertici è hamiltoniano.  $\square$

È immediato osservare che esistono grafi hamiltoniani la cui chiusura non è completa (eg un ciclo con almeno 5 vertici).

**Corollario 10.2.4.** *Un grafo semplice con almeno 3 vertici e grado minimo almeno  $\frac{n}{2}$  è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Si noti che la chiusura di un tale grafo è  $K_n$ . La tesi segue quindi dal Corollario 10.2.3.  $\square$

## 10.2.2 Altre condizioni sufficienti

La condizione data dal Teorema 10.2.2 è necessaria e sufficiente, ma chiaramente non immediata applicabilità: non ci dice nulla, ad esempio, sui grafi la cui chiusura non è un grafo completo. D'altro canto, le condizioni del Corollario 10.2.4 sono sufficienti, ma troppo stringenti. Vediamo ora altre condizioni sufficienti più generali, fornite da Chvátal, affinché un grafo sia hamiltoniano. Diciamo che una sequenza  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  di interi positivi è una *sequenza grafica* di un grafo semplice  $G = (V, E)$  se  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $d(v_i) = d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Lemma 10.2.5.** *Sia  $G(V, E)$  un grafo con sequenza grafica  $(d_1, \dots, d_n)$  ed  $n \geq 3$ . Supponiamo inoltre che, per ogni  $k \leq \frac{n}{2}$ ,  $d_{n-k+1} \geq k + 1$  oppure  $d_{k+1} \geq n - k$ , o entrambi. Allora  $G$  è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $c(G)$  è completo; la tesi segue quindi dal Corollario 10.2.3. Supponiamo non lo sia: allora esistono due vertici  $u, v \in V$  non adiacenti in  $c(G)$ . Tra tali vertici, prendiamo una coppia che massimizza  $d_{c(G)}(u) + d_{c(G)}(v)$ , e supponiamo senza perdita di generalità che  $d_{c(G)}(u) \leq d_{c(G)}(v)$ : quindi  $d_{c(G)}(u) \leq \frac{n}{2}$ . Per definizione di chiusura  $d_{c(G)}(u) + d_{c(G)}(v) \leq n - 1$ . Sia ora  $S_z$  l'insieme dei vertici di  $V \setminus \{z\}$  che non sono adiacenti a  $z$  in  $c(G)$ ; si noti che  $|S_z| = n - 1 - d_{c(G)}(z)$  e quindi  $|S_u| = n - 1 - d_{c(G)}(u)$  e  $|S_v| = n - 1 - d_{c(G)}(v) \geq d_{c(G)}(u)$ .

Per la scelta di  $u$  e  $v$ , tutti i vertici di  $S_v$  hanno grado al più  $d_{c(G)}(u)$ . Quindi l'insieme  $S'$  di vertici di  $c(G)$  con grado al più  $d_{c(G)}(u)$  ha cardinalità almeno  $d_{c(G)}(u)$ .

Si noti che, passando da  $c(G)$  a  $G$ , il grado di ogni vertice non aumenta. Ponendo  $k = d_{c(G)}(u)$ , si ha che l'intero  $(n - k + 1)$ -mo della sequenza grafica associata a  $G$  ha valore al più  $k$ , cioè  $d_{n-k+1} \leq k$ . Similmente, tutti i vertici di  $S_u$  hanno grado al più  $d_{c(G)}(v) \leq n - 1 - d_{c(G)}(u) = n - 1 - k$ . Quindi l'insieme  $S''$  di vertici di  $G$  con grado al più  $n - k - 1$  ha cardinalità almeno  $n - k$  (ai vertici di  $S_u$  posso aggiungere  $u$ , dato che  $d_{c(G)}(u) \leq n - 1 - k$ ), i.e. l'elemento con pedice  $n - (n - k) + 1 = k + 1$  della sequenza grafica di  $G$  ha valore almeno  $n - k - 1$ . In formule,  $d_{k+1} \leq n - k - 1$ . Questo contraddice le ipotesi del lemma.

□

**Esercizio 10.1.** *Si mostri un grafo  $G$  con  $n \geq 3$  che non verifica le ipotesi del Lemma 10.2.5, ma tale che  $c(G)$  è un grafo completo.*

## 10.3 Cicli hamiltoniani in grafi planari

Una congettura tuttora aperta è la seguente.

**Congettura 10.1.** *In un grafo 2-connesso  $G(V, E)$  è possibile trovare una famiglia di cicli  $C_1, \dots, C_k$  tali che, per ogni arco  $e \in E$ , esistono esattamente 2 cicli la cui intersezione è  $e$ .*

Si noti che la precedente congettura è vera per grafi 2-connessi planari, poiché è sufficiente prendere come cicli le facce di tali grafi. Un'altra nota congettura è la seguente:

**Congettura 10.2.** *Un grafo planare, cubico, senza ponti è hamiltoniano.*

La sua importanza deriva (anche) dal seguente lemma.

**Lemma 10.3.1.** *Se la Congettura 10.2 fosse vera, allora il Teorema dei 4 colori sarebbe vero.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un grafo come nelle ipotesi della congettura e sia  $C$  un suo ciclo hamiltoniano. Allora i vertici del grafo  $G \setminus C$  hanno grado esattamente 1, perché su ogni vertice incidono esattamente due archi di  $C$ . Quindi gli archi di  $G \setminus C$  formano un matching perfetto su  $G$ , diciamo  $M_1$ . Si noti inoltre che un ciclo hamiltoniano è l'unione

di due matching perfetti disgiunti, diciamo  $M_2$  ed  $M_3$ . Quindi  $E(G)$  è partizionabile in 3 matching perfetti. Dall'Osservazione 7.4.3, otteniamo che  $G$  è buono. La tesi dunque segue dal Teorema 9.1.5.  $\square$

La Congettura 10.2 è però falsa: un controesempio è stato fornito da Tutte. Al fine di dimostrare che tale grafo non è hamiltoniano, si risolvano nell'ordine i seguenti esercizi.

**Esercizio 10.2.** *Nessun circuito hamiltoniano del grafo  $G_1$  della Figura 18.11 in Bondy & Murty, Graph Theory, Springer, 2008, prende contemporaneamente  $e$  ed  $e'$ .*

**Esercizio 10.3.** *Nessun circuito hamiltoniano del grafo  $G_2$  della Figura 18.11 in Bondy & Murty, Graph Theory, Springer, 2008, prende contemporaneamente  $e$  ed  $e'$ .*

**Esercizio 10.4.** *Nessun circuito hamiltoniano del grafo  $G_3$  della Figura 18.11 in Bondy & Murty, Graph Theory, Springer, 2008, prende  $e$ .*

**Esercizio 10.5.** *Il grafo di Tutte (Figura 18.7 in Bondy & Murty, Graph Theory, Springer, 2008) non è hamiltoniano.*

Dato un grafo ed una sua rappresentazione piana, per  $i = 1, \dots, n$ , denotiamo con  $\phi_i$  il numero di facce di perimetro esattamente  $i$ . Dato un ciclo hamiltoniano  $C$  di  $G$ , ogni faccia di  $G$  appartiene completamente o alla regione interna, o a quella esterna delimitate da  $C$ . Denotiamo quindi con  $\phi_i^{INT}(C)$  il numero di facce di perimetro  $i$  che appartengono alla regione interna delimitata da  $C$  e con  $\phi_i^{EXT}(C)$  il numero di facce di perimetro  $i$  che appartengono alla regione esterna delimitata da  $C$ . Omettiamo la dipendenza da  $C$  quando è chiara dal contesto.

**Teorema 10.3.2.** *Sia  $G$  una rappresentazione piana di un grafo,  $C$  un circuito hamiltoniano su  $G$ . Allora vale*

$$\sum_{i=1}^n (i-2)(\phi_i^{INT} - \phi_i^{EXT}) = 0. \quad (10.1)$$

*Dimostrazione.* Denotiamo con  $E_{INT}$  l'insieme di archi che non appartengono al ciclo ed appartengono alla regione interna delimitata da  $C$ ; con  $E_{EXT}$  l'insieme di archi che non appartengono al ciclo ed appartengono alla regione esterna delimitata da  $C$ . È immediato osservare che  $(E_{INT}, E_{EXT}, E(C))$  è una partizione di  $E$ .

**Claim 1:**  $\sum_{i=1}^n \phi_i^{INT} = |E_{INT}| + 1$

*Dimostrazione.* Si noti che la relazione è vera se  $E_{INT} = \emptyset$ , poiché in questo caso  $G$  ha una sola faccia interna. Poiché  $G$  può essere ottenuto tramite una serie di suddivisioni di tale faccia, e poiché ciascuna di tali suddivisioni mantiene valida la tesi, concludiamo che il claim è vero.  $\square$

**Claim 2:**  $\sum_{i=1}^n i\phi_i^{INT} = 2|E_{INT}| + n(G)$

*Dimostrazione.* Si noti che  $\sum_{i=1}^n \phi_i^{INT}$  è pari alla somma  $S$  dei perimetri delle facce di  $G$  interne a  $C$ . Si noti che ogni arco di  $E_{INT}$  appare esattamente due volte in  $S$ , ogni arco di  $E_{EXT}$  non dà nessun contributo ad  $S$ , mentre ogni arco di  $C$  dà contributo esattamente 1. La tesi segue immediatamente da questa osservazione.  $\square$

Dai Claim 1 e 2 si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n (i-2)\phi_i^{INT} = n(G) - 2. \quad (10.2)$$

Si noti che lo stesso ragionamento fatto per  $\phi_i^{INT}$  è ripetibile per  $\phi_i^{EXT}$ , ottenendo:

$$\sum_{i=1}^n (i-2)\phi_i^{EXT} = n(G) - 2 \quad (10.3)$$

Sottraendo (10.3) da (10.2), si ottiene la tesi.  $\square$

**Corollario 10.3.3.** *Il grafo di Grinberg (Figura 18.9 in Bondy & Murty, Graph Theory, Springer, 2008) non è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Si noti che le facce di tale grafo hanno perimetro 5 o 8, tranne la faccia esterna che ha perimetro 9. Per il teorema precedente, se  $G$  ammettesse un ciclo hamiltoniano  $C$ , varrebbe

$$3(\phi_5^{INT} - \phi_5^{EXT}) + 6(\phi_8^{INT} - \phi_8^{EXT}) + 7(\phi_9^{INT} - \phi_9^{EXT}) = 0.$$

Poiché esiste una sola faccia di perimetro 9,  $7(\phi_9^{INT} - \phi_9^{EXT}) = \pm 7$ . D'altro canto  $3(\phi_5^{INT} - \phi_5^{EXT}) + 6(\phi_8^{INT} - \phi_8^{EXT}) = 0 \pmod{3}$ , quindi (10.1) non è verificata, una contraddizione.  $\square$

**Domanda 10.1.** *Esiste un grafo planare 5-regolare ?*

## 10.4 Tour euleriani

Un *tour* di un grafo è un percorso chiuso del grafo che passa almeno una volta per ogni arco del grafo. Un tour è detto *euleriano* se passa esattamente una volta per ogni arco del grafo. Il suo nome è legato al noto matematico Eulero e corrisponde alla nascita della teoria dei grafi. Nella scorsa sezione abbiamo accennato al fatto che non esiste un algoritmo polinomiale per determinare se un grafo ammette o no un ciclo hamiltoniano. Per il problema di determinare se un grafo è *euleriano*, i.e. se ammette un tour euleriano, esiste invece un tale algoritmo, ottenibile come immediato corollario del seguente teorema.

**Teorema 10.4.1.** *Un grafo connesso è euleriano se e solo se tutti i suoi vertici hanno grado pari.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un grafo e sia  $v$  un suo vertice di grado dispari. Sia, per assurdo,  $C = v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_k = v_1$  un tour euleriano su  $G$  e si supponga senza perdita di generalità che  $v \neq v_1$ . Si orienti ogni arco  $v_iv_{i+1}$  come  $(v_i, v_{i+1})$ . Si noti che  $v$  dovrà avere tanti archi entranti quanti archi uscenti. Poiché ogni arco di  $G$  appare esattamente una volta in  $C$ , il grado di  $v$  deve essere dispari, una contraddizione.

Si supponga ora che la direzione opposta sia falsa, e sia  $G$  un grafo con tutti i vertici di grado pari che è un minimo controesempio al teorema. Si noti che  $G$  ha sicuramente un ciclo. Si scelga infatti un vertice  $u$  e si costruisca a partire da questo un percorso  $P$  percorrendo ad ogni passo un arco non ancora selezionato, arrestandosi quando si incontra un vertice già percorso o quando non c'è più un arco che è possibile percorrere. Poiché ogni vertice ha grado pari, il percorso si arresterà in un vertice  $v$  già percorso. Si noti che il sottopercorso di  $P$  che ha come estremità  $v$  è il ciclo di  $G$  cercato, diciamo  $C$ .  $C$  non è un tour euleriano, altrimenti  $G$  non sarebbe un controesempio. Il grafo  $G' = G \setminus C$  è quindi non vuoto e non è un controesempio al teorema, per la minimalità di  $G$ .  $G'$  ammette dunque un tour euleriano  $C'$ . Poiché  $G$  è connesso,  $C'$  deve passare per almeno un vertice di  $C$ , diciamo  $v$ . Sia  $P'$  il percorso di  $G$  che si ottiene sostituendo alla prima occorrenza di  $v$  in  $C'$  il ciclo  $C$ . Si noti che  $P'$  è ben definito, è un ciclo ed attraversa esattamente una volta tutti gli archi del grafo.  $P'$  è quindi il tour euleriano cercato, contraddicendo il fatto che  $G$  fosse un controesempio.  $\square$

Si noti che la dimostrazione precedente fornisce implicitamente anche un algoritmo per trovare un tour euleriano, individuando iterativamente un ciclo  $C$  semplice del grafo.

## Esercizi

**Esercizio 10.1** Sia  $T$  un albero in grafo  $G = (V, E)$ . Dimostrare che

- -Per ogni  $e \in G \setminus T$ ,  $T + e$  contiene un solo ciclo  $C_e$ . (Tale ciclo si chiama *Ciclo fondamentale*).
- Ogni ciclo di  $G$  può essere ottenuto come differenza simmetrica di cicli fondamentali.
- $G$  è bipartito se e solo se tutti i suoi cicli fondamentali sono pari.
- Per ogni  $e \in T$ ,  $G$  contiene un solo taglio  $\delta(X)$  tale che  $\delta(X) \cap E(T) = \{e\}$ . (tale taglio si chiama *Taglio fondamentale*).
- Ogni taglio di  $G$  può essere ottenuto come differenza simmetrica di tagli fondamentali.
- $G$  è Euleriano se e solo se ogni taglio fondamentale è pari.
- Se  $C$  è un ciclo di  $G$  e  $\delta(X)$  un taglio di  $G$ , allora  $C \cap \delta(X)$  ha cardinalità pari.

**Esercizio 10.2** Dato  $G = (V, E)$  con  $k$  nodi di grado dispari, dimostrare che  $E$  può essere partizionato in cicli ed  $\frac{k}{2}$  cammini le cui estremità sono nodi di grado dispari.

Dato un grafo  $G = (V, E)$ , un percorso è *coprente* se è chiuso e contiene ogni arco di  $G$  almeno una volta.

**Esercizio 10.3** Dimostrare che se  $P$  è un percorso coprente di  $G$  minimale,  $P$  percorre ogni arco di  $G$  al massimo 2 volte.

**Esercizio 10.4 (+)** Formulate il problema di trovare un percorso coprente di lunghezza minima come un problema di calcolo di un matching perfetto di peso minimo.